This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

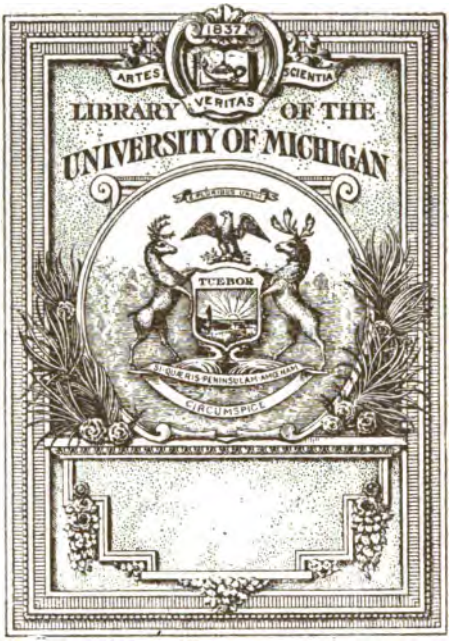
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
808
.G74

A Monsieur Arm. Mottard
Souvenir de

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

DE LA MÉCANIQUE.

La présente dissertation, et les thèses qui y sont annexées, peuvent être livrées à l'impression.

Le Doyen de la faculté des sciences,

ÉD. MORREN.

Le Secrétaire,

L. PÉRARD.

Extrait de l'article 4 du règlement relatif à l'exécution de l'arrêté royal du 16 septembre 1853.

.... Les opinions de l'auteur ne peuvent être considérées, par le fait de l'admission de son travail, comme étant celles de la Faculté ou de l'Université.

1407

3.7
Alexander Ziwet

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.

DISSERTATION INAUGURALE
PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTEUR SPÉCIAL
EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES,

PAR

JOSEPH GRAINDORGE,

Docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'École des mines de Liége, membre de la Société royale des sciences de Liége, etc.

Les épreuves publiques auront lieu le 22 juin 1871, à 3 heures de relevée, à la salle académique de l'Université de Liége.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1871

Prof. Alex. Ziwet
qt.
2-13-1923

Staicho

9-19-3246i

THÈSES.

—

1. La coloration des corps éclairés par la lumière blanche, et vus par réflexion ou par transparence, ne résulte pas de l'absorption proprement dite d'une partie des rayons composant la lumière blanche.

2. La conception d'un aimant terrestre mobile suffit provisoirement pour expliquer la génération de tous les phénomènes manifestés par l'aiguille aimantée.

3. Il n'existe pas de phénomène physique ou chimique propre à attribuer à l'électricité un caractère spécial.

4. On peut donner une interprétation mécanique de la quantité de mouvement d'un corps.

5. La diversité de couleur des composantes des étoiles doubles n'est pas une illusion d'optique.

6. La distinction des nébuleuses en deux espèces ne doit pas être attribuée à l'insuffisance des instruments employés.

7. L'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune prouve que la durée du jour sidéral n'est pas constante.

8. On peut diviser les étoiles en quatre types principaux.

417677

9. Les expériences d'*Arago* et de M. *Kirchhoff* sur la constitution physique du soleil ne sont contradictoires qu'en apparence.

10. L'hypothèse d'un milieu résistant est confirmée par le mouvement des comètes : les résultats connus ne suffisent pas pour établir d'une manière incontestable l'hypothèse de la force répulsive.

11. L'intégration de plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre simultanées n'est pas toujours possible.

12. On peut ramener l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à trois variables à la recherche d'une intégrale commune de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

13. La méthode des limites et la méthode infinitésimale tendent vers un même but, mais par des procédés différents.

14. Contrairement à l'assertion de M. *Darboux*, l'équation $B^2 - 4AC = 0$, ne représente pas toujours le lieu des points de rebroussement des courbes représentées par

$$A\frac{dy^2}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + C = 0.$$

15. L'exactitude du calcul différentiel ne provient pas, comme l'a dit *Carnot*, de ce qu'il y a compensation d'erreurs dans les termes que l'on néglige.

16. On peut démontrer l'existence de la dérivée d'une fonction continue d'une variable indépendante.

17. L'algèbre ne donne rien au delà de ce qu'on lui demande : le degré de l'équation d'un problème est le degré de la question proposée.

18. La valeur du théorème de *Sturm*, comparé aux autres méthodes, ne doit pas s'apprécier par la quantité de travail numérique qu'il exige.

19. L'intégration de deux équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables n'est pas toujours possible.

20. La méthode donnée par *Jacobi*, pour éliminer la fonction inconnue d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, n'est pas générale.

INTRODUCTION.

L'un des problèmes les plus importants dont les géomètres de ce siècle se sont occupés, et qui a conduit à une théorie complète de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, est celui de la recherche des lois du mouvement des corps. *Lagrange* a donné à ce problème une très-grande extension : mais c'est seulement plus tard que *Poisson* et *Hamilton* sont parvenus à transformer convenablement les formules du célèbre analyste. Enfin, cette question a été complétement perfectionnée par *Jacobi* (*).

Avant les travaux d'*Hamilton*, la détermination du mouvement d'un point libre dans l'espace, sous l'action de certaines forces, dépendait de l'intégration d'un système de trois équations différentielles ordinaires du second ordre : le mouvement d'un système de points soumis à des forces attractives ou répulsives dépendait de l'intégration d'un système d'équations

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin, 1866.

différentielles ordinaires du second ordre, entre les coordonnées de ces points et le temps. Le nombre de ces équations était triple de celui des points matériels.

Hamilton a ramené ce problème à la recherche et à la différentiation d'une seule fonction, appelée par lui *fonction principale* ou *fonction caractéristique,* satisfaisant à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Cependant la question était loin d'être résolue : la difficulté n'était que détournée, comme l'a fait remarquer *Hamilton* lui-même (*).

Les travaux d'*Hamilton* se rapportaient aux seuls problèmes auxquels s'applique le principe des forces vives.

M. *Donkin* et *Jacobi* ont montré que, dans le cas où les liaisons sont des fonctions du temps, c'est-à-dire lorsque le principe des forces vives n'est pas applicable, les équations de *Lagrange* peuvent encore se ramener à la *forme canonique,* et qu'il est possible de leur appliquer toutes les théories développées par *Hamilton.*

Reprenant, plus tard, la théorie de l'intégration des équations de la dynamique, *Jacobi* démontra qu'il est inutile de former les deux équations aux dérivées partielles d'*Hamilton,* et d'en trouver une intégrale

(*) HAMILTON, *On a general method in dynamics,* PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1834, p. 248.

commune. Il prouva qu'il suffit de chercher une solution complète d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire : cette solution obtenue, dit l'illustre géomètre, le problème ne dépend plus que de simples différentiations. En outre, remarquant l'importance d'un théorème démontré par *Poisson* (*), il montra que, du moment où l'on connaît deux intégrales autres que celle des forces vives pour un problème quelconque de mécanique, auquel ce principe est applicable, on peut, par la formule de *Poisson*, en déduire toutes les intégrales par de simples différentiations; il a aussi étendu cette propriété aux problèmes auxquels le principe des forces vives n'est pas applicable. Cependant, comme l'a observé M. *Bertrand* (**), *Jacobi* s'est trompé sur la valeur du théorème de *Poisson*. Dans la plupart des cas, ce théorème donne des résultats illusoires : mais, en examinant la question de plus près, M. *Bertrand* est parvenu à profiter de ces résultats illusoires pour compléter la solution du problème. Les travaux de M. *Bertrand*, et ceux de *Bour* qui en sont le complément, ont terminé tout ce que l'on peut faire sur

(*) Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de l'École polytechnique, 15e cahier, p. 280.

(**) *Journal de mathématiques de* M. Liouville, t. XVII.

ce sujet. *Bour* (*) transforma la question : il établit l'équation linéaire aux dérivées partielles, à laquelle doivent satisfaire les intégrales du problème. Chaque nouvelle intégrale qu'il parvient à trouver lui permet de diminuer de deux unités le nombre des variables; et même certaines intégrales qui, à première vue, sont étrangères à la question, permettent de diminuer en une seule fois de plusieurs unités le nombre des variables. Le procédé de *Bour* supposait les liaisons indépendantes du temps. Mais cette condition n'est pas indispensable, et M. *Liouville* a prouvé d'ailleurs que le cas général peut toujours être ramené au cas particulier traité par *Bour*.

(*) Bour, *Sur l'intégration des équations de la dynamique*, Mémoires des savants étrangers, t. XIV.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. 1

I. Réduction des équations différentielles du mouvement de *Lagrange* à la forme hamiltonienne. — Intégration de ces équations. 1

II. Extension des méthodes précédentes au cas où les liaisons sont des fonctions du temps 18

III. Propriétés de la fonction V 31

IV. Relations entre les dérivées des variables par rapport aux constantes, et les dérivées des constantes par rapport aux variables. 38

V. Théorèmes de *Lagrange* et de *Poisson* 46

VI. Applications des théories précédentes. 54

VII. Méthode de M. *Bertrand* pour l'intégration des équations de la mécanique 82

VIII. Méthode de *Bour*. 99

NOTE 114

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

DE LA MÉCANIQUE.

I

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LAGRANGE A LA FORME HAMILTONIENNE. — INTÉGRATION DE CES ÉQUATIONS.

1. Dans son immortel Traité de *Mécanique analytique*, *Lagrange* a montré comment toute la théorie de la Dynamique se réduit à la formule générale

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z), \quad (1)$$

m étant la masse d'un des points matériels composant le système, x, y, z les coordonnées de ce point, X, Y, Z les composantes, parallèles aux axes coordonnés, des forces qui sollicitent le point m.

S'il existe une *fonction des forces*, c'est-à-dire une fonction U, dont les dérivées soient égales aux composantes des forces, de manière que

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}, \quad (*)$$

(*) En d'autres termes, nous supposons que $Xdx + Ydy + Zdz$ est

l'équation (1) prend la forme

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \delta U. \qquad (2)$$

2. Aux variables $x, y, z, \ldots$, substituons n variables nouvelles $q_1, q_2, \ldots q_n$, liées aux précédentes par des équations de condition, telles que

$$x = \varphi(t, q_1, \ldots q_n);$$

nous aurons, en remplaçant par $x', q'_1, \ldots q'_n$, les dérivées de $x, q_1, \ldots q_n$, prises par rapport à t,

$$x' = \psi(t, q_1, \ldots q_n, q'_1, \ldots q'_n),$$

et

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dx'}{dt}.$$

Or, en désignant par T la moitié de la somme des forces vives du système, c'est-à-dire en posant

$$T = \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

nous aurons

$$\frac{dT}{dx'} = mx',$$

et, par suite,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d.\frac{dT}{dx'}}{dt};$$

de sorte que l'équation (2) devient

$$\sum\left[\frac{d.\frac{dT}{dx'}}{dt}\delta x + \frac{d.\frac{dT}{dy'}}{dt}\delta y + \frac{d.\frac{dT}{dz'}}{dt}\delta z\right] = \delta U. \qquad (3)$$

une différentielle exacte. Nous ferons la même hypothèse dans toute l'étendue de notre travail.

3. Si les liaisons du système sont fonctions du temps t,

$$x' = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \ldots + \frac{dx}{dq_n} q'_n,$$

d'où

$$\frac{dx'}{dq'_i} = \frac{dx}{dq_i};$$

cela posé, calculons $\frac{dT}{dq'_i}$, et $\frac{dT}{dq_i}$; nous aurons

$$\frac{dT}{dq'_i} = \frac{dT}{dx'}\frac{dx'}{dq'_i} + \frac{dT}{dy'}\frac{dy'}{dq'_i} + \frac{dT}{dz'}\frac{dz'}{dq'_i},$$

ou

$$\frac{dT}{dq'_i} = \frac{dT}{dx'}\frac{dx}{dq_i} + \frac{dT}{dy'}\frac{dy}{dq_i} + \frac{dT}{dz'}\frac{dz}{dq_i};$$

En outre,

$$\frac{dT}{dq_i} = \frac{dT}{dx'}\frac{dx'}{dq_i} + \frac{dT}{dy'}\frac{dy'}{dq_i} + \frac{dT}{dz'}\frac{dz'}{dq_i}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dq_i} &= \frac{d}{dq_i}\left(\frac{dx}{dt} + q'_1\frac{dx}{dq_1} + \ldots + q'_n\frac{dx}{dq_n}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dq_i}\right) + q'_1\frac{d}{dq_1}\left(\frac{dx}{dq_i}\right) + \ldots + q'_n\frac{d}{dq_n}\left(\frac{dx}{dq_i}\right)\\ &= \frac{d.\dfrac{dx}{dq_i}}{dt};\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\frac{dT}{dq_i} = \frac{dT}{dx'}\frac{d.\dfrac{dx}{dq_i}}{dt} + \frac{dT}{dy'}\frac{d.\dfrac{dy}{dq_i}}{dt} + \frac{dT}{dz'}\frac{d.\dfrac{dz}{dq_i}}{dt}.$$

Mais on a

$$\frac{d.\dfrac{dT}{dq'_i}}{dt} = \left(\frac{dT}{dx'}\frac{d.\dfrac{dx}{dq_i}}{dt} + \frac{dx}{dq_i}\frac{d.\dfrac{dT}{dx'}}{dt}\right) + \text{etc.};$$

d'où, en soustrayant ces deux dernières équations,

$$d.\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i}\frac{1}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dq_i}=d.\frac{d\mathrm{T}}{dx'}\frac{dx}{dq_i}+d.\frac{d\mathrm{T}}{dy'}\frac{dy}{dq_i}+d.\frac{d\mathrm{T}}{dz'}\frac{dz}{dq_i}.$$

En multipliant par δq_i, et prenant la somme, il vient

$$\Sigma\left(d.\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i}\frac{1}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dq_i}\right)\delta q_i=\Sigma\left[d.\frac{d\mathrm{T}}{dx'}\frac{\delta x}{dt}+d.\frac{d\mathrm{T}}{dy'}\frac{\delta y}{dt}+d.\frac{d\mathrm{T}}{dz'}\frac{\delta z}{dt}\right]=\delta\mathrm{U},$$

en vertu de l'équation (3).

Si nous remplaçons aussi dans U, x, y, z, en fonction de $q_1, \ldots q_n$, nous aurons

$$\Sigma\left(d.\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i}\frac{1}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dq_i}\right)\delta q_i=\Sigma\frac{d\mathrm{U}}{dq_i}\delta q_i;$$

enfin, si l'on suppose que le nombre des variables indépendantes le plus petit possible est n, les variations δq seront indépendantes, et il viendra

$$d.\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i}\frac{1}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dq_i}=\frac{d\mathrm{U}}{dq_i}. \qquad (4)$$

Les équations, au nombre de n, que l'on déduit de cette dernière, sont *les équations fondamentales de la Dynamique.*

4. Les équations (4), qui sont dues à *Lagrange*, sont du second ordre par rapport à t; elles ne sont pas faciles à intégrer dans le plus grand nombre des cas. Mais si l'on introduit de nouvelles variables, en faisant usage de la

tranformation imaginée par *Poisson* (*) et par *Hamilton* (**), on pourra les réduire à d'autres qui ne contiennent plus que des dérivées du premier ordre, mais dont le nombre sera doublé. Cette transformation est généralement attribuée à *Hamilton*, parce qu'il en a déduit des propriétés remarquables sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

5. Pour effectuer cette transformation, nous supposerons d'abord un problème dans lequel les liaisons sont indépendantes du temps, et nous aurons

$$x' = \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \ldots + \frac{dx}{dq_n} q'_n,$$
$$y' = \frac{dy}{dq_1} q'_1 + \ldots + \frac{dy}{dq_n} q'_n,$$
$$z' = \frac{dz}{dq_1} q'_1 + \ldots + \frac{dz}{dq_n} q'_n;$$

$x', y', z', \ldots$ seront donc des fonctions, homogènes et du premier degré, de $q'_1, \ldots q'_n$. Mais alors, il est évident que la fonction T sera aussi homogène et du second degré par rapport à $q'_1, \ldots q'_n$.

Cela admis, posons avec *Poïsson* et *Hamilton*,

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i, \qquad (5)$$

$p_1, \ldots p_n$ étant de nouvelles variables liées aux anciennes par les équations (5). Ces équations sont linéaires en $q'_1, \ldots q'_n$: en effet, T étant homogène et du second degré par rapport à q'_i, $\frac{dT}{dq'_i}$ sera homogène et du premier degré.

(*) Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de l'École polytechnique, 15e cahier, p. 272.

(**) Hamilton, *On a general method in dynamics*, Philosophical Transactions, 1835, p. 97.

Par suite de ces transformations :

1° Le premier terme de l'équation (4) devient $\frac{dp_i}{dt}$.

2° Le second membre $\frac{dU}{dq_i}$ ne changera pas, puisque U qui renferme seulement $q_1, \ldots q_n$ est indépendant de $q'_1, \ldots q'_n$, et par suite de $p_1, \ldots p_n$.

3° Le second terme $\frac{dT}{dq_i}$ pris en supposant T fonction de $q_1, \ldots q_n, q'_1, \ldots q'_n$, changera de forme, et nous nous proposons de chercher ce qu'il devient lorsque T est fonction de $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$.

6. Nous aurons, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$2T = \frac{dT}{dq'_1} q'_1 + \frac{dT}{dq'_2} q'_2 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n} q'_n,$$

ou

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_n q'_n; \qquad (5^{bis})$$

par suite,

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots p_n q'_n - T.$$

Or, si nous prenons la différentielle totale des deux membres, il vient

$$\begin{aligned} dT = {} & p_1 dq'_1 + p_2 dq'_2 + \ldots + p_n dq'_n \\ & + q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \ldots + q'_n dp_n \\ & - \frac{dT}{dq_1} dq_1 - \frac{dT}{dq_2} dq_2 - \ldots - \frac{dT}{dq_n} dq_n \\ & - \frac{dT}{dq'_1} dq'_1 - \frac{dT}{dq'_2} dq'_2 - \ldots - \frac{dT}{dq'_n} dq'_n, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$dT = q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \ldots + q'_n dp_n - \frac{dT}{dq_1} dq_1 - \ldots - \frac{dT}{dq_n} dq_n.$$

Les coefficients du second membre étant les dérivées partielles de T, nous aurons

$$\left(\frac{dT}{dq_i}\right) = -\frac{dT}{dq_i}, \quad \frac{dT}{dp_i} = q'_i = \frac{dq_i}{dt},$$

de sorte que, dans la nouvelle hypothèse, les équations du mouvement sont comprises dans les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{U}}{dq_i} - \frac{d\mathrm{T}}{dq_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{T}}{dp_i}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

7. Actuellement, si nous posons

$$\mathrm{T} - \mathrm{U} = \mathrm{H},$$

nous aurons, puisque U ne renferme pas $p_1, \ldots p_n$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{H}}{dq_i} &= \frac{d\mathrm{T}}{dq_i} - \frac{d\mathrm{U}}{dq_i}, \\ \frac{d\mathrm{H}}{dp_i} &= \frac{d\mathrm{T}}{dp_i}; \end{aligned}$$

et, par suite, les équations (6) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{H}}{dp_i}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Telle est la forme qu'*Hamilton* a donnée, dans ses mémoires, aux équations de la Dynamique (*).

8. *Remarque.* — Il est facile de conclure de là que H *reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

En effet, H étant fonction de $p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$, on a, en vertu des équations (7),

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{d\mathrm{H}}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} \right) = 0; \quad (8)$$

donc, H reste constante pendant tout le mouvement.

(*) *On a general method*, etc., PHILOSOPHICAL TRANSAC., 1834 et 1835.

9. Le système (7), de $2n$ équations différentielles ordinaires, a reçu le nom de *Système hamiltonien* : observons que, dans ce système, la fonction H, comme précédemment la fonction T, ne contient pas explicitement le temps. Ce sont les équations d'un problème quelconque de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable; en les intégrant, nous aurons $2n$ intégrales distinctes contenant $2n$ *constantes arbitraires*. Les $2n$ équations ainsi obtenues serviront à déterminer $p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_n$, en fonction de t et des $2n$ constantes arbitraires.

10. Avant de traiter de l'intégration de ces équations, nous devons exposer un théorème dû à M. *Liouville*, d'un usage fréquent dans la théorie de l'intégration des équations de la Dynamique, et des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mais nous allons d'abord rappeler les notations dont nous nous servirons dans la démonstration et dans les numéros suivants.

11. Si l'on suppose que α, β sont des fonctions des quantités $p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_n$, on doit à *Poisson* la notation suivante :

$$(\alpha, \beta) = \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \dots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n},$$

ou

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right). \qquad (9)$$

M. *Donkin*, de son côté, introduit une notation symbolique pour représenter la quantité renfermée entre parenthèses

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{d(q_i, p_i)} = \frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i};$$

de sorte que l'on a

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{d(\alpha, \beta)}{d(q_i, p_i)}. \qquad (10)$$

12. Cela posé, supposons que l'on ait n équations

$$a_1 = \varphi_1(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_i = \varphi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

dans lesquelles $a_1, \dots a_n$, sont des constantes arbitraires. Ces équations pourront servir à déterminer les n quantités $p_1, \dots p_n$, en fonction de $q_1, \dots q_n$ et des constantes, et nous nous proposons de démontrer que *la condition d'intégrabilité de l'expression*

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i}, \tag{11}$$

n'est autre chose que $(a_i, a_k) = 0$, *ou* $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ (*).

En effet, si dans l'expression

$$a_\mu = \varphi_\mu(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

on remplace $p_1, \dots p_n$, par leurs valeurs en fonction de $q_1, \dots q_n, a_1, \dots a_n$, on aura une identité; par suite, en la différentiant par rapport à q_i, il viendra

$$\frac{da_\mu}{dq_i} + \frac{da_\mu}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \dots + \frac{da_\mu}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i} = 0;$$

de même

$$\frac{da_\nu}{dq_i} + \frac{da_\nu}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \dots + \frac{da_\nu}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i} = 0.$$

Multipliant la première par $\frac{da_\nu}{dp_i}$, la seconde par $\frac{da_\mu}{dp_i}$, et soustrayant, on trouve

$$\frac{da_\mu}{dq_i}\frac{da_\nu}{dp_i} - \frac{da_\mu}{dp_i}\frac{da_\nu}{dq_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dq_i}\left(\frac{da_\mu}{dp_i}\frac{da_\nu}{dp_k} - \frac{da_\mu}{dp_k}\frac{da_\nu}{dq_i}\right),$$

(*) DONKIN, *On a class of differential equations*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1854, p. 84.

ou, d'après la notation de M. *Donkin*,

$$\frac{d(a_\mu, a_\nu)}{d(q_i, p_i)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dp_k}{dq_i} \frac{d(a_\mu, a_\nu)}{d(p_i, p_k)}.$$

Maintenant, faisons la somme des expressions analogues obtenues en donnant à i toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$; le coefficient de $\frac{dp_i}{dq_k}$ étant le même que celui de $\frac{dp_k}{dq_i}$ en signe contraire, nous aurons

$$(a_\mu, a_\nu) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} \right) \frac{d(a_\mu, a_\nu)}{d(p_i, p_k)}. \qquad (12)$$

De cette formule on conclut déjà :

La *condition nécessaire* pour avoir

$$\frac{dp_k}{dq_i} = \frac{dp_i}{dq_k},$$

pour toutes les valeurs de i et de k, égales à $1, 2, 3, \ldots n$, c'est que les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

soient vérifiées pour les mêmes valeurs de μ et de ν.

13. Cette condition est *suffisante* : pour le prouver, multiplions les deux membres de l'équation (12) par $\frac{d(p_r, p_s)}{d(a_\mu, a_\nu)}$, et prenons la somme pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$, de μ et de ν; il viendra

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{d(p_r, p_s)}{d(a_\mu, a_\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{d(p_r, p_s)}{d(a_\mu, a_\nu)} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} \right) \frac{d(a_\mu, a_\nu)}{d(p_i, p_k)};$$

or, dans le second membre, le coefficient de $\frac{dp_r}{dq_s} - \frac{dp_s}{dq_r}$ est

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\frac{da_\mu}{dp_r} \frac{da_\nu}{dp_s} - \frac{da_\mu}{dp_s} \frac{da_\nu}{dp_r} \right) \left(\frac{dp_r}{da_\mu} \frac{dp_s}{da_\nu} - \frac{dp_r}{da_\nu} \frac{dp_s}{da_\mu} \right);$$

ce coefficient est égal à l'unité, tandis que les autres sont nuls.

En remplaçant donc r et s par k et i, nous aurons

$$\frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{d(p_k, p_i)}{d(a_\mu, a_\nu)}; \qquad (13)$$

par conséquent, pour avoir la condition

$$\frac{dp_k}{dq_i} = \frac{dp_i}{dq_k},$$

il suffit que l'équation

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

soit vérifiée pour les valeurs de μ et de ν égales à $1, 2, \ldots n$.

14. Ce théorème démontré, revenons au problème de l'intégration des équations (7) qui ont pour type

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Il est d'abord facile de vérifier que *l'intégrale des forces vives*

$$H = h,$$

est une intégrale de ces équations (*).

En effet, comme H ne renferme pas *explicitement* le temps, sa dérivée par rapport à t sera

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dH}{dq_n}\frac{dq_n}{dt} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dt},$$

(*) On appelle *intégrale* des équations (7) une équation

$$\zeta = \alpha,$$

α étant une constante, et ζ une fonction de $t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, telle que sa dérivée totale par rapport à t, soit identiquement nulle en vertu des équations (7).

ou, en vertu des équations (7),

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \ldots + \frac{dH}{dq_n}\frac{dH}{dp_n} - \frac{dH}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \ldots - \frac{dH}{dp_n}\frac{dH}{dq_n} = 0.$$

La dérivée $\frac{dH}{dt}$ étant identiquement nulle, il en résulte que $H = const. = h$, est une intégrale des équations (7).

Cela posé, démontrons la proposition suivante :

15. Théorème. — *Si, par un moyen quelconque, on parvient à déterminer* n — 1 *autres intégrales de ces équations,*

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

et si les premiers membres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ *de ces équations sont des fonctions de* $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, *ne contenant pas explicitement le temps, et satisfaisant à la condition*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

le problème sera résolu.

Il suffira alors de résoudre les n *équations*

$$H = h, \quad \varphi_1 = a_1, \ldots \varphi_{n-1} = a_{n-1}, \qquad (14)$$

par rapport à $p_1, p_2, \ldots p_n$, *et de substituer ces valeurs dans l'expression*

$$dV' = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - H dt, \qquad (15)$$

laquelle est une différentielle exacte; on intégrera cette fonction, et l'on obtiendra les n *autres intégrales du problème en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V', *prises par rapport aux* n *premières constantes.*

16. *Démonstration.* — 1° L'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - H dt,$$

est une différentielle exacte : en d'autres termes, les conditions

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i},$$

sont vérifiées, (H) désignant le résultat de la substitution de $p_1, \ldots p_n$ dans H.

Nous avons vu (n° 13) que la condition

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

équivaut à la condition d'intégrabilité

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i};$$

il reste à prouver que la seconde condition

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i},$$

a également lieu.

Or, les quantités $p_1, \ldots p_n$, ayant été déterminées par les équations (14), la quantité H devient identiquement égale à la constante h, si l'on remplace $p_1, \ldots p_n$ par leurs valeurs ; donc

$$(\mathrm{H}) = h,$$

et, comme p_i ne contient pas explicitement t, il en résulte que la seconde condition est aussi vérifiée.

En intégrant l'expression (15) nous aurons

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V} - ht, \tag{16}$$

V désignant l'intégrale de l'expression

$$p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n.$$

2° Les n autres intégrales du problème sont déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV'}{da_1} = \frac{dV}{da_1} = \alpha_1,\\
&\frac{dV'}{da_2} = \frac{dV}{da_2} = \alpha_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dV'}{da_{n-1}} = \frac{dV}{da_{n-1}} = \alpha_{n-1},\\
&\frac{dV'}{dh} = \frac{dV}{dh} - t = \alpha_n,
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$\alpha_1, \ldots \alpha_n$ désignant des constantes arbitraires.

Nous devons pour cela démontrer que les dérivées totales, par rapport à t, de ces équations se réduisent identiquement à zéro, en vertu des équations (7).

Or, en désignant par i un des nombres $1, 2, \ldots \overline{n-1}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} &= \frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}\\
&= \frac{d.\frac{dV}{dq_1}}{da_i}\frac{dH}{dp_1} + \ldots + \frac{d.\frac{dV}{dq_n}}{da_i}\frac{dH}{dp_n}\\
&= \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{da_i} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{da_i};
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} = \frac{d(H)}{da_i};$$

mais, comme (H) est identiquement égal à h, il en résulte que

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} = 0.$$

Si, maintenant, nous prenons la dérivée par rapport à t de la dernière des équations (17)

$$\frac{dV'}{dh} = \frac{dV}{dh} - t,$$

il vient

$$\frac{d\left(\frac{dV'}{dh}\right)}{dt} = \frac{d\left[\frac{dV}{dh} - t\right]}{dt} = -1 + \frac{d.\frac{dV}{dh}}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d.\frac{dV}{dh}}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= -1 + \frac{d(H)}{dh} = 0;$$

par conséquent, la seconde partie de la proposition est démontrée.

17. Nous pouvons encore remarquer qu'il n'est pas même nécessaire de déterminer la fonction V, donnée par la relation

$$V = \int (p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n). \qquad (18)$$

En effet, si nous prenons la dérivée par rapport à a_μ de l'égalité

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i},$$

il vient

$$\frac{d.\frac{dp_i}{dq_k}}{da_\mu} = \frac{d.\frac{dp_k}{dq_i}}{da_\mu},$$

ou bien

$$\frac{d.\frac{dp_i}{da_\mu}}{dq_k} = \frac{d.\frac{dp_k}{da_\mu}}{dq_i};$$

par suite, au lieu des n équations (17), on aura, pour déterminer les n dernières intégrales du problème, les n équations

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left(\frac{dp_1}{da_1}\,dq_1+\frac{dp_2}{da_1}\,dq_2+\ldots+\frac{dp_n}{da_1}\,dq_n\right)=\alpha_1,\\
&\int\left(\frac{dp_1}{da_2}\,dq_1+\frac{dp_2}{da_2}\,dq_2+\ldots+\frac{dp_n}{da_2}\,dq_n\right)=\alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int\left(\frac{dp_1}{da_{n-1}}\,dq_1+\frac{dp_2}{da_{n-1}}\,dq_2+\ldots+\frac{dp_n}{da_{n-1}}\,dq_n\right)=\alpha_{n-1},\\
&\int\left(\frac{dp_1}{dh}\,dq_1+\frac{dp_2}{dh}\,dq_2+\ldots+\frac{dp_n}{dh}\,dq_n\right)=\alpha_n+t.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

18. Enfin, on peut encore simplifier, ou du moins ramener à un autre, le problème de la recherche de la fonction V′, telle que

$$dV'=p_1dq_1+\ldots+p_ndq_n-Hdt,$$

ou de la fonction V, déterminée par l'équation

$$dV=p_1dq_1+\ldots+p_ndq_n.$$

En effet, les valeurs de $p_1,\ldots p_n$, déduites des équations (14), sont celles qui vérifient les équations

$$p_1=\frac{dV'}{dq_1},\ldots p_n=\frac{dV'}{dq_n},\quad\frac{dV'}{dt}=-H;$$

par conséquent, la fonction V′ doit réduire à une identité l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dV'}{dt}+H\left(q_1,q_2,\ldots q_n,\frac{dV'}{dq_1},\ldots\frac{dV'}{dq_n}\right)=0,\qquad(20)$$

ou bien, la fonction V doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$H\left(q_1,q_2,\ldots q_n,\frac{dV}{dq_1},\ldots\frac{dV}{dq_n}\right)=h.\qquad(21)$$

19. Nous voyons par là que le problème de l'intégration d'un système de $2n$ équations différentielles simultanées, auquel est ramené un problème de mécanique, lorsque le principe des forces vives est applicable, dépend de la recherche d'une solution complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans laquelle la fonction inconnue figure seulement par ses dérivées partielles. Cette équation peut toujours être formée facilement : elle n'est autre que l'intégrale des forces vives dans laquelle on a remplacé $p_1, \ldots p_n$, par les dérivées partielles $\frac{dV}{dq_1}, \ldots \frac{dV}{dq_n}$, de la fonction inconnue. Si nous voulions intégrer cette équation aux dérivées partielles, par les méthodes connues, nous devrions intégrer un système de $2n$ équations différentielles ordinaires, qui serait précisément le système dont nous sommes partis. En apparence donc, nous aurions seulement transformé une question en une autre non moins compliquée. Mais on sait que, pour trouver une intégrale complète de l'équation (21), il n'est pas nécessaire de pouvoir déterminer les $2n$ intégrales du système (7) : il suffit de trouver une seule de ces intégrales, comme l'a fait remarquer *Jacobi* dans ses travaux (*) sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(*) Jacobi, *Nova methodus æquationes differentiales partiales primi ordinis integrandi*, Journal de Crelle, LX.

II.

EXTENSION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES AU CAS OÙ LES LIAISONS SONT DES FONCTIONS DU TEMPS.

20. Les recherches d'*Hamilton*, perfectionnées par *Jacobi* dans ses premiers mémoires, exigeaient que la fonction H fût indépendante du temps; cela nous a conduit à cette conséquence que T est une fonction homogène de $q'_1, \dots q'_n$. Or, cette restriction d'*Hamilton* n'est pas nécessaire : on peut supposer, comme l'a fait M. *Donkin* (*), que la fonction T renferme explicitement le temps : en d'autres termes, la théorie s'étend facilement à un problème auquel le principe des forces vives n'est pas applicable.

Reprenons l'équation de *Lagrange* (n° 3)

$$\frac{d.\dfrac{d\mathrm{T}}{dq'_i}}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dq_i} + \frac{d\mathrm{U}}{dq_i}, \qquad (4)$$

dans laquelle nous supposerons T une fonction de $t, q_1, q_2, \dots q_n, q'_1, \dots q'_n$, et U une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n, t$; posons

$$\mathrm{U} + \mathrm{T} = \mathrm{W}; \qquad (22)$$

nous aurons

$$\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i} = \frac{d\mathrm{W}}{dq'_i},$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dq_i} + \frac{d\mathrm{U}}{dq_i} = \frac{d\mathrm{W}}{dq_i},$$

(*) *On a class*, etc., PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1854.

et l'équation (4) devient

$$d.\frac{dW}{dq'_i} = \frac{dW}{dq_i}. \qquad (23)$$

Soit encore

$$\frac{dW}{dq'_i} = p_i,$$

et considérons la fonction

$$Z = -W + p_1 q'_1 + \ldots + p_n q'_n, \qquad (24)$$

dans laquelle nous supposerons $q'_1, \ldots q'_n, W$, exprimées en fonction de $p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$; nous aurons (*)

$$q'_i = \frac{dZ}{dp_i}, \qquad (25)$$

et

$$\frac{dW}{dq_i} = -\frac{dZ}{dq_i}.$$

L'équation (23) devient

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dZ}{dq_i}; \qquad (23^{bis})$$

les équations (25) et (23^{bis}) ont donc la même forme que les équations (7), et l'on peut appliquer aux équations (7) les méthodes d'intégration sans faire aucune hypothèse sur la nature de la fonction T.

21. *Remarque.* — Dans le cas particulier où T est une fonction homogène de $q'_1, \ldots q'_n$, on a

$$2T = p_1 q'_1 + \ldots + p_n q'_n,$$

d'où

$$Z = -(T + U) + 2T = T - U.$$

(*) Voir la note à la fin du travail.

22. Un système de $2n$ équations différentielles de la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i}, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

dans lesquelles

$$H = F(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

a été appelé, par *Jacobi*, SYSTÈME CANONIQUE; il est facile de voir qu'il comprend, comme cas particulier, les équations (7).

Nous allons démontrer que l'intégration de ce système dépend de la recherche d'une solution complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire, à $n + 1$ variables indépendantes, de la forme

$$\frac{dV}{dt} + F\left(t, q_1, \dots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \dots \frac{dV}{dq_n}\right) = 0. \quad (27)$$

Dans cette équation, comme on le voit, la fonction inconnue V n'entre que par ses dérivées partielles : elle a donc précisément la forme à laquelle il faut ramener toute équation aux dérivées partielles pour pouvoir lui appliquer les méthodes d'intégration connues (*).

23. Considérons le système canonique (26) : une intégrale de ce système est une équation

$$U = \alpha,$$

dans laquelle α est une constante, et U une fonction de t, $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, telle que sa dérivée totale, par rapport à t, soit nulle en vertu des équations (26).

(*) JACOBI, *Nova methodus æquationes differentiales primi ordinis integrandi*, JOURNAL DE CRELLE, LX.

Si nous voulons trouver la condition à laquelle U doit satisfaire pour être une intégrale, nous aurons d'abord

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)=\frac{dU}{dt}+\frac{dU}{dq_1}\frac{dq_1}{dt}+\ldots+\frac{dU}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}+\frac{dU}{dp_1}\frac{dp_1}{dt}+\ldots+\frac{dU}{dp_n}\frac{dp_n}{dt},$$

et, par conséquent, on devra avoir identiquement

$$\frac{dU}{dt}+\frac{dU}{dq_1}\frac{dH}{dp_1}-\frac{dU}{dp_1}\frac{dH}{dq_1}+\ldots+\frac{dU}{dq_n}\frac{dH}{dp_n}-\frac{dU}{dp_n}\frac{dH}{dq_n}=0,$$

condition que l'on peut écrire (n° 11)

$$\frac{dU}{dt}+(U,H)=0. \qquad (28)$$

Toute fonction U satisfaisant à cette condition (28) donnera, en l'égalant à une constante, une intégrale du système (26).

24. *Remarque.* — Il est facile de voir que l'équation $H=const.$ sera une intégrale, si la fonction H est indépendante du temps.

En effet, si l'on remplace U par H, il vient

$$\frac{dH}{dt}+(H,H)=0;$$

et, comme (H, H) est identiquement nul (*),

$$\frac{dH}{dt}=0;$$

par suite, H ne doit pas renfermer t explicitement. Nous en concluons que, dans le cas où l'on considère H comme une fonction du temps, l'équation $H=const.$ n'est pas une intégrale.

(*) Cela résulte de la formule (9).

25. THÉORÈME. — *Si, par un moyen quelconque, on peut déterminer* n *intégrales*

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_n = a_n, \tag{29}$$

du système (26), *satisfaisant à la condition*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \tag{30}$$

pour toutes les valeurs de i *et de* k *égales à* 1, 2, ... n, *on pourra trouver les* n *autres intégrales de la manière suivante* (*) : *on déduira, des* n *équations* (29), *les valeurs de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *que l'on substituera dans l'expression*

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - (H)\, dt, \tag{31}$$

laquelle sera une différentielle exacte; puis on intégrera cette expression, ce qui donnera la fonction V : *les* n *autres intégrales s'obtiendront en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V, *prises par rapport aux constantes* $a_1, a_2, \ldots a_n$.

26. *Démonstration.* — 1° L'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - (H)\, dt,$$

est une différentielle exacte, (H) désignant la valeur de la fonction H, lorsque l'on remplace $p_1, p_2, \ldots p_n$, par leurs valeurs.

D'après ce qui a été dit (n° 13), la condition $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$, n'est autre chose que la condition d'intégrabilité

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i}, \tag{32}$$

de l'expression

$$p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n;$$

(*) Ce théorème a été communiqué en 1853 par M. *Liouville* au bureau des longitudes *Journal de Liouville*, t. XX, p. 137. — *Connaissance des temps*, 1853.

il nous reste à prouver que l'on a la condition

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right) = -\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i}\ (*).$$

On a, par définition,

$$\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_i} + \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \ldots + \frac{d\mathrm{H}}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i};$$

mais, si nous tenons compte des équations (26), et des conditions d'intégrabilité (32), il vient

$$\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dq_1}{dt}\frac{dp_i}{dq_1} + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\frac{dp_i}{dq_n};$$

or, le $\frac{dp_i}{dt}$ qui figure dans cette formule est une dérivée totale, et comme, en vertu des équations (29), p_i est une fonction de t, $q_1, \ldots q_n$,

$$\frac{dp_i}{dt} = \left(\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dq_n}{dt};$$

par suite,

$$\frac{d(\mathrm{H})}{dq_i} = -\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\ (**);$$

par conséquent, il sera possible de trouver la fonction

$$\mathrm{V} = \int (p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n - (\mathrm{H})\, dt) + \gamma, \qquad (33)$$

γ étant une constante arbitraire.

27. *Remarque.* — Cette fonction V nous donnera les équations

$$\frac{d\mathrm{V}}{dq_1} = p_1, \ldots \frac{d\mathrm{V}}{dq_n} = p_n, \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = -(\mathrm{H}), \qquad (34)$$

(*) Les crochets qui enveloppent $\frac{dp_i}{dt}$ indiquent une dérivée partielle.
(**) *Idem.*

dont les n premières sont équivalentes aux équations (29), c'est-à-dire que les valeurs de $p_1, \ldots p_n$, déduites de ces équations et des équations (29) sont les mêmes : la dernière est une identité.

28. 2° Les n autres intégrales du problème proposé sont (*)

$$\frac{dV}{da_1} = \alpha_1, \ldots \frac{dV}{da_n} = \alpha_n. \tag{35}$$

Il suffira de prouver que leurs dérivées totales, par rapport à t, sont identiquement nulles, en vertu des équations (26).

Or, nous avons

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} = \frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} + \frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dq_n}\frac{dq_n}{dt} \text{ (**)},$$

ou bien, à cause de la relation

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dq} = \frac{d.\frac{dV}{dq}}{da_i},$$

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} = \frac{d.\frac{dV}{dt}}{da_i} + \frac{d.\frac{dV}{dq_1}}{da_i}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d.\frac{dV}{dq_n}}{da_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Si l'on tient compte des équations (26) et des équations (34) qui tiennent lieu des relations (29), il vient

$$\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt} = -\frac{d(\mathrm{H})}{da_i} + \frac{dp_1}{da_i}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1} + \ldots + \frac{dp_n}{da_i}\frac{d\mathrm{H}}{dp_n};$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin, 1866.

(**) Dans le premier membre $\frac{d.\frac{dV}{da_i}}{dt}$ est une dérivée totale; dans le second membre, c'est une dérivée partielle.

de plus, on aura

$$\frac{d(\mathrm{H})}{da_i} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{dp_1}{da_i} + \ldots + \frac{d\mathrm{H}}{dp_n}\frac{dp_n}{da_i},$$

et, par conséquent,

$$d.\frac{\frac{d\mathrm{V}}{da_i}}{dt} = 0;$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\mathrm{V}}{da_i} = \alpha_i,$$

sera une intégrale des équations (26) pour toutes les valeurs de i égales à 1, 2, ... n.

29. *Remarque* I. — On pourrait résoudre le problème beaucoup plus simplement, même sans connaître les n premières intégrales, si toutefois l'on parvenait, par un moyen quelconque, à déterminer la fonction V. Les $2n$ intégrales seraient données par les $2n$ équations

$$\frac{d\mathrm{V}}{dq_1} = p_1, \ldots \frac{d\mathrm{V}}{dq_n} = p_n, \tag{36}$$

et

$$\frac{d\mathrm{V}}{da_1} = \alpha_1, \ldots \frac{d\mathrm{V}}{da_n} = \alpha_n, \tag{35}$$

dont les n premières ne sont autres que les équations (29).

Or, *cette fonction* V *peut être trouvée comme une intégrale complète d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

En effet, d'après ce que nous avons vu (n° 27), l'équation

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} + (\mathrm{H}) = 0,$$

doit avoir lieu identiquement entre la fonction V, et la quantité (H), lorsque, dans la fonction

$$H = F(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

on remplace $p_1, \dots p_n$, par leurs valeurs tirées des équations (29), équivalentes aux équations (34) que l'on en déduit. Donc, cette fonction V, renfermant n constantes arbitraires $a_1, a_2, \dots a_n$, doit satisfaire identiquement à l'équation

$$\frac{dV}{dt} + F\left(t, q_1, \dots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \dots \frac{dV}{dq_n}\right) = 0\ (*), \qquad (37)$$

c'est-à-dire que V doit être une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire, facile à former : il suffit pour cela de remplacer dans la fonction F, les quantités $p_1, \dots p_n$, par les dérivées de la fonction V relatives aux variables indépendantes $q_1, \dots q_n$.

30. *Remarque* II. — Lorsque H ne renferme pas explicitement le temps, l'équation $H = h$ est une solution du système canonique, comme nous l'avons démontré (n° 14), et nous pouvons alors prendre l'équation aux dérivées partielles plus simple

$$H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \dots \frac{dV}{dq_n}\right) = h. \qquad (37^{bis})$$

On peut déduire cette dernière équation de la précédente (37) : en effet, prenons pour intégrale de l'équation (37)

$$V = \int_{t_0}^{t} (p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n - H dt);$$

(*) Dans la suite, nous emploierons indistinctement la lettre F, ou la lettre H.

comme, dans le cas actuel, $H = const. = h$, on aura

$$V + h(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} (p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n) = \psi(q_1, \ldots q_n, q^0_1, \ldots q^0_n),$$

en désignant par $q^0_1, \ldots q^0_n$, les valeurs de $q_1, \ldots q_n$, correspondant à t_0.

Par suite,

$$V = \psi - h(t - t_0);$$

d'où

$$\frac{dV}{dt} = -h,$$

et, en remplaçant $\frac{dV}{dt}$ par $-h$ dans l'équation (37), il vient

$$H\left(q_1, \ldots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \ldots \frac{dV}{dq_n}\right) = h,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

31. Si V est une solution complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dV}{dt} + F\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \ldots \frac{dV}{dq_n}\right) = 0, \qquad (37)$$

c'est-à-dire une solution renfermant, outre la constante arbitraire ajoutée, n constantes arbitraires telles que l'on ne puisse les éliminer entre les $n + 1$ équations obtenues en différentiant V par rapport à $q_1, \ldots q_n, t$, qu'en faisant usage de toutes ces équations, cette fonction V donnera toutes les intégrales du système canonique.

Supposons cette solution complète V connue, et posons

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i;$$

l'équation (37) devient

$$\frac{dV}{dt} + F(t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n) = 0. \qquad (38)$$

En différentiant par rapport à q_i, il vient

$$\frac{d.\frac{dV}{dt}}{dq_i} + \frac{dF}{dq_i} + \frac{dF}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_i} + \ldots + \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i} = 0; \quad (39)$$

mais, on a

$$\frac{d.\frac{dV}{dt}}{dq_i} = \frac{d.\frac{dV}{dq_i}}{dt} = \left(\frac{dp_i}{dt}\right),$$

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i};$$

par conséquent, l'équation (39) donne

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{dF}{dq_i} + \frac{dF}{dp_1}\frac{dp_i}{dq_1} + \ldots + \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_i}{dq_n} = 0. \quad (40)$$

En outre, si nous prenons la dérivée totale de p_i par rapport à t, nous aurons

$$\frac{dp_i}{dt} = \left(\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}; \quad (41)$$

ajoutant les équations (40) et (41), on a

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{dF}{dq_i} = \frac{dp_i}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dF}{dp_1}\right) + \ldots + \frac{dp_i}{dq_n}\left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{dF}{dp_n}\right),$$

et les n équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dF}{dp_i},$$

donnent les n équations

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dF}{dq_i}.$$

Or, si nous prenons la dérivée totale de l'équation

$$\frac{dV}{da_i} = \alpha_i,$$

par rapport à t, nous trouvons

$$\frac{d^2V}{da_i dt} + \frac{d^2V}{da_i dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d^2V}{da_i dq_n}\frac{dq_n}{dt} = 0;$$

de même, en différentiant l'équation (37) par rapport à a_i, on obtient

$$\frac{d^2V}{da_i dt} + \frac{dF}{dp_1}\frac{d^2V}{da_i dq_1} + \ldots + \frac{dF}{dp_n}\frac{d^2V}{da_i dq_n} = 0.$$

De ces deux dernières équations on déduit la relation

$$\frac{d^2V}{da_i dq_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dF}{dp_1}\right) + \ldots + \frac{d^2V}{da_i dq_n}\left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{dF}{dp_n}\right) = 0,$$

laquelle donne n équations analogues.

Or, de ces n équations on conclut les n conditions

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dF}{dp_i},$$

ou bien le déterminant des n^2 quantités

$$\frac{d^2V}{da_i dq_k} = \frac{d}{da_i}\left(\frac{dV}{dq_k}\right),$$

est nul; mais cette dernière condition exprimerait que l'on peut éliminer (*) les n constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, entre les n équations

(*) On trouve une démonstration fort simple de cette propriété dans un travail de M. Imschenetsky, professeur à l'université de Kazan, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

$$\frac{dV}{dq_k} = \varphi_k(q_1, q_2, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t),$$

ce qui est impossible, puisque V est une solution complète de l'équation (37).

Par suite, si V est une solution complète, les conditions

$$\frac{dV}{da_i} = \alpha_i,$$

sont les mêmes que les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{dF}{dp_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dF}{dq_i}. \end{aligned}\right. \qquad (42)$$

32. Si donc l'on parvient à trouver une intégrale complète de l'équation (37), la question sera résolue, et l'on aura les $2n$ intégrales du problème par de simples différentiations. Nous observerons ici, comme au n° 19, que nous n'avons pas fait une transformation inutile, comme il semblerait à première vue : cela résulte des considérations que nous avons exposées dans ce n° 19. Notre but n'étant pas de donner une théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous renverrons pour cette question aux nombreux mémoires de *Jacobi*, *Cauchy*, *Bour*, et à ceux de MM. *Liouville*, *Bertrand* et *Serret*.

III.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION V.

33. La fonction V n'est autre que l'intégrale définie

$$V = \int_{t_0}^{t} (U + T)\, dt; \tag{43}$$

cette dernière fonction qu'*Hamilton* a nommée *fonction principale* jouit des mêmes propriétés que la précédente. A cet effet, reprenons l'équation aux dérivées partielles (37), que nous écrirons

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) + H = 0 \ (*). \tag{44}$$

En observant que V est fonction de t, $q_1, \ldots q_n$, nous aurons

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right) + \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{dV}{dq_n}\frac{dq_n}{dt};$$

or, en vertu des équations (35) et (36) du n° 29,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right) + p_1 q'_1 + \ldots + p_n q'_n, \tag{45}$$

ou bien, à cause de la relation (5^{bis}),

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right) + 2T, \tag{45^{bis}}$$

(*) Nous désignerons ici, pour éviter la confusion, la dérivée totale de V, par rapport à t, par $\frac{dV}{dt}$ sans parenthèses, et la dérivée partielle par $\left(\frac{dV}{dt}\right)$.

et, par suite,

$$\frac{dV}{dt} = -H + 2T = -T + U + 2T = U + T; \quad (46)$$

par conséquent,

$$dV = (U + T)\,dt,$$

d'où

$$V = \int_{t_0}^{t} (U + T)\,dt, \quad (43)$$

ce qui démontre la proposition.

34. Cela posé, si nous prenons la variation de cette intégrale, nous trouvons, puisque U ne renferme pas $q'_1, \ldots q'_n$,

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} dt \left[\frac{dU}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dU}{dq_n}\delta q_n + \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq_n}\delta q_n + \frac{dT}{dq'_1}\delta q'_1 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}\delta q'_n \right];$$

en intégrant par parties les derniers termes, on a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dT}{dq'_i}\,dq'_i = \left(\frac{dT}{dq'_i}\,\delta q_i\right)_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} d.\frac{dT}{dq'_i}\,\delta q_i;$$

d'où

$$\delta V = \left(\frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}\delta q_n\right)_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} dt \left[\frac{dU}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dU}{dq_n}\delta q_n + \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq_n}\delta q_n - d.\frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 - \ldots - d.\frac{dT}{dq'_n}\delta q_n \right]. \quad (47)$$

Or, le dernier terme est nul, à cause des équations (4), et il reste

$$\delta V = \left(\frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}\delta q_n\right)_{t_0}^{t}, \qquad (47^{bis})$$

ou bien, en indiquant par un indice 0 le résultat de la substitution de t_0 à la place de t,

$$\delta V = \frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}\delta q_n - \left(\frac{dT}{dq'_1}\right)_0 \delta q^0_1 - \ldots - \left(\frac{dT}{dq'_n}\right)_0 \delta q^0_n. \qquad (47^{ter})$$

Si l'on se donne le temps et les positions extrêmes des points du système, le second membre de cette dernière équation est nul, et l'on a

$$\delta V = 0;$$

par conséquent, la fonction V est un maximum ou un minimum.

35. Si l'on se donne seulement le temps, et pas les positions extrêmes, les termes en dehors du signe $\int$ dans δV ne sont pas nuls; mais cette expression (47^{ter}) de δV n'est pas la variation complète de V; car, $\int_{t_0}^{t}(U+T)\,dt$ renferme la variable t. Pour avoir la variation complète, nous devrons ajouter $\left(\frac{dV}{dt}\right)\delta t$, et il viendra

$$\left.\begin{aligned} \delta V = {} & \frac{dT}{dq'_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}\delta q_n - \left(\frac{dT}{dq'_1}\right)_0 \delta q^0_1 - \ldots - \left(\frac{dT}{dq'_n}\right)_0 \delta q^0_n \\ & + \left(\frac{dV}{dt}\right)\delta t, \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

valeur que nous pouvons écrire ainsi :

$$\delta V = p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n - p^0_1\delta q^0_1 - \ldots - p^0_n\delta q^0_n + \left(\frac{dV}{dt}\right)\delta t, \qquad (48^{bis})$$

ou, à cause de (44),

$$\delta V = p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n - p^0_1\delta q^0_1 - \ldots - p^0_n\delta q^0_n - H\delta t. \qquad (49)$$

36. Nous aurons alors les $2n + 1$ équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{dq_1} = p_1, \ldots \frac{dV}{dq_n} = p_n, \\ &\frac{dV}{dq^0_1} = -p^0_1, \ldots \frac{dV}{dq^0_n} = -p^0_n, \\ &\left(\frac{dV}{dt}\right) = -H, \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

qui donneraient $p_1, \ldots p_n, p^0_1, \ldots p^0_n$ en fonction de t, $q_1, \ldots q_n, q^0_1, \ldots q^0_n$, et de $2n$ constantes, si V était connue en fonction de ces quantités : mais, comme U et T renferment ces quantités $p^0_1, \ldots p^0_n$, il en sera de même de V et l'on tourne dans un cercle vicieux.

37. *Hamilton* a suivi, dans le cas où le principe des forces vives est applicable, une marche différente de celle que nous venons d'adopter. Il a montré d'abord que les intégrales des équations du mouvement sont déterminées par les équations

$$p_i = \frac{dV}{dq_i}, \quad p^0_i = -\frac{dV}{dq^0_i},$$

dans lesquelles i peut recevoir les valeurs $1, 2, \ldots n$, et

$$V = \int_{t_0}^{t} (U + T)\, dt.$$

Cette dernière intégrale peut être mise sous la forme

$$V = \int_{t_0}^{t} (2T - H)\, dt;$$

à cause de la relation (5bis) et des équations du mouvement (7)

$$q'_i = \frac{dH}{dp_i}, \quad (7)$$

cette valeur devient

$$V = \int_{t_0}^{t} \left[\sum p_i \frac{dH}{dq_i} - H\right] dt. \quad (51)$$

38. Cela posé, on a (n° 33)

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right) + \sum p_i q'_i; \tag{45}$$

d'où

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{dV}{dt} - \sum p_i q'_i,$$

et, à cause des équations (8) et (51),

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = -\,H.$$

Comme H reste constante pendant toute la durée du mouvement (n° 8), V sera une intégrale commune aux deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right) + H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \dots \frac{dV}{dq_n}\right) &= 0, \\ \left(\frac{dV}{dt}\right) + H\left(q^0_1, q^0_2, \dots q^0_n, \frac{dV}{dq^0_1}, \dots \frac{dV}{dq^0_n}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

ou (*)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right) + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{dV}{dq_1}, \dots \frac{dV}{dq_n}\right) &= U(q_1, \dots q_n), \\ \left(\frac{dV}{dt}\right) + T\left(q^0_1, q^0_2, \dots q^0_n, \frac{dV}{dq^0_1}, \dots \frac{dV}{dq^0_n}\right) &= U(q^0_1, \dots q^0_n), \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$q^0_1, \dots q^0_n$ étant les valeurs initiales de $q_1, \dots q_n$.

39. *Remarque.* — La fonction V jouit donc de la double propriété suivante :

1° Si les positions des points extrêmes sont fixes, le premier terme de (47) est nul; la variation de cette intégrale

(*) Hamilton, *On a general method in dynamics*, Philosophical Transactions, 1835, p. 100.

est nulle, et cette condition donne les équations différentielles du mouvement, sous la forme (4) assignée par *Lagrange*.

2° Si les positions extrêmes sont supposées variables, le premier terme de (47) n'est pas nul : on trouve alors pour δV, l'équation transformée (49), laquelle donnera les intégrales des équations différentielles du mouvement.

40. D'après *Hamilton*, la fonction V devait donc satisfaire à deux équations aux dérivées partielles, tandis que, d'après *Jacobi*, il suffit (n° 29) de trouver une seule intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, non linéaire. C'est là le premier grand pas que le géomètre allemand (*) a fait faire à la théorie actuelle.

41. Outre la fonction V, *Hamilton* en considère une autre S définie par l'équation

$$S = V + H(t - t_0). \qquad (54)$$

Cette fonction jouit de propriétés analogues à celles de la fonction V, et peut lui être substituée, comme nous allons le voir.

En prenant la variation de S, on trouve

$$\delta S = \delta V + (t - t_0)\,\delta H + H\delta t,$$

et, en remplaçant δV par sa valeur (49),

$$\delta S = p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n - p^0{}_1\delta q^0{}_1 - \ldots - p^0{}_n\delta q^0{}_n + (t - t_0)\,\delta H. \qquad (55)$$

Si donc l'on considère S comme une fonction de $q^0{}_1, \ldots q^0{}_n$, $q_1, \ldots q_n$, et de H, on aura, après avoir éliminé le temps t, au moyen de l'équation $H = T - U$, les $2n + 1$ équations

(*) Liouville, *Journal de Mathématiques*, t. III, p. 79.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dS}{dq_1} = p_1, \ldots \frac{dS}{dq_n} = p_n, \\ &\frac{dS}{dq^0_1} = -p^0_1, \ldots \frac{dS}{dq^0_n} = -p^0_n, \\ &\frac{dS}{dH} = t - t_0, \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

lesquelles résoudront le problème lorsque S sera connue.

Or, la fonction S satisfait à une équation aux dérivées partielles plus simple que la première des équations (53); en effet, nous avons

$$T - U = H,$$

et, en remplaçant $p_1, \ldots p_n$, par $\frac{dS}{dq_1}, \ldots \frac{dS}{dq_n}$, on obtient

$$T\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{dS}{dq_1}, \ldots \frac{dS}{dq_n}\right) - U(q_1, \ldots q_n) = H, \quad (57)$$

équation qui ne contient pas la fonction inconnue S.

42. La fonction S n'est autre que l'intégrale définie

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T dt; \quad (58)$$

en effet,

$$S = V + H(t - t_0),$$

et comme

$$V = \int_{t_0}^{t} (U + T)\, dt,$$

$$S = \int_{t_0}^{t} (U+T) dt + H(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} (U+T+H) dt = \int_{t_0}^{t} 2T dt, \quad (59)$$

puisque H reste constante (*) pendant toute la durée du mouvement (n° 8).

Nous aurons donc

$$S = \int_{t_0}^{t} (p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n); \quad (60)$$

(*) Bien entendu, en supposant toujours le principe des forces vives applicable.

le second membre est une différentielle exacte, puisqu'il doit se réduire à une fonction de t seulement.

43. Ces deux fonctions V et S qu'*Hamilton* a introduites, et dont la connaissance permet de déterminer rapidement la solution d'un problème quelconque de mécanique, auquel le principe des forces vives est applicable, ont reçu deux noms. La première, la fonction V, est appelée la *fonction principale* du problème : quant à la seconde, la fonction S, elle porte le nom de *fonction caractéristique.* Si nous observons que

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2}\sum mv^2,$$

nous aurons

$$S = \int_{t_0}^{t} dt \sum mv^2;$$

cette intégrale est celle que l'on considère dans le principe de la moindre action.

IV.

RELATIONS ENTRE LES DÉRIVÉES DES VARIABLES PAR RAPPORT AUX CONSTANTES, ET LES DÉRIVÉES DES CONSTANTES PAR RAPPORT AUX VARIABLES.

44. Les équations qui donnent la solution du problème général

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \varphi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t), \\ \beta_i &= \psi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t), \end{aligned}\right\} (61)$$

peuvent être considérées comme exprimant les variables

$p_1, \dots p_n$, $q_1, \dots q_n$, en fonction de t et des $2n$ constantes, ou bien les $2n$ constantes, en fonction de t et des $2n$ variables $q_1, \dots q_n$, $p_1, \dots p_n$.

Nous aurons alors les relations suivantes, énoncées pour la première fois par *Jacobi* (*),

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_i}{dp_k} &= -\frac{dq_k}{d\alpha_i}, & \frac{d\beta_i}{dq_k} &= \frac{dp_k}{d\alpha_i}, \\ \frac{d\alpha_i}{dp_k} &= \frac{dq_k}{d\beta_i}, & \frac{d\alpha_i}{dq_k} &= -\frac{dp_k}{d\beta_i}. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

43. Pour démontrer la première équation (62), considérons l'intégrale (n° 29)

$$\frac{dV}{d\alpha_i} = \beta_i, \quad (63)$$

dont le premier membre est une fonction de $q_1, \dots q_n$, $\alpha_1, \dots \alpha_n$, t, et remplaçons-y les quantités $q_1, \dots q_n$, déduites en fonction de $\beta_1, \dots \beta_n$, $\alpha_1, \dots \alpha_n$, des équations

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \dots \frac{dV}{d\alpha_n} = \beta_n; \quad (64)$$

alors l'équation (63) deviendra une identité, et sa dérivée par rapport à $\alpha_{i'}$ sera nulle. Par suite,

$$\frac{d^2V}{d\alpha_i d\alpha_{i'}} + \frac{d^2V}{d\alpha_i dq_1}\frac{dq_1}{d\alpha_{i'}} + \dots + \frac{d^2V}{d\alpha_i dq_n}\frac{dq_n}{d\alpha_{i'}} = 0. \quad (65)$$

Or, des équations (36) et (63), il résulte

$$\frac{dV}{d\alpha_{i'}} = \beta_{i'}, \quad \frac{dV}{dq_i} = p_i,$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 397. Notre démonstration diffère un peu de celle de *Jacobi*.

par conséquent, l'égalité (65) devient

$$\frac{d\beta_{i'}}{d\alpha_i} + \frac{dp_1}{d\alpha_i}\frac{dq_1}{d\alpha_{i'}} + \ldots + \frac{dp_n}{d\alpha_i}\frac{dq_n}{d\alpha_{i'}} = 0,$$

équation qui a lieu pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$ de i.

Multipliant par $\frac{d\alpha_i}{dp_k}$, et faisant la somme pour toutes les valeurs de l'indice i, les indices i' et k restant les mêmes, le premier terme du résultat sera

$$\frac{d\beta_{i'}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_k} + \frac{d\beta_{i'}}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dp_k} + \ldots + \frac{d\beta_{i'}}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dp_k} = \frac{d\beta_{i'}}{dp_k};$$

en effet, dans l'hypothèse actuelle, $\beta_{i'}$ ne renferme pas explicitement p_k, $\beta_{i'}$ étant fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, t$.

De même, dans le second terme, $\frac{dq_1}{d\alpha_{i'}}$ sera multiplié par

$$\frac{dp_1}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_k} + \frac{dp_1}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dp_k} + \ldots + \frac{dp_1}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dp_k} = \frac{dp_1}{dp_k} = 0,$$

puisque p_1 est exprimé en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, q_1, q_2, \ldots q_n, t$.

Tous les termes suivants sont nuls aussi, excepté le coefficient de $\frac{dq_k}{d\alpha_{i'}}$, égal à $\frac{dp_k}{dp_k} = 1$; il vient donc

$$\frac{d\beta_{i'}}{dp_k} + \frac{dq_k}{d\alpha_{i'}} = 0,$$

ce qui démontre la première formule de *Jacobi*.

46. Les équations canoniques sont presque symétriques en p et q ; pour changer les variables les unes dans les autres, il suffira de changer H en — H, de sorte que l'on peut faire dépendre l'intégration du système canonique de l'équation

$$\frac{dW}{dt} - H\left(\frac{dW}{dp_1}, \frac{dW}{dp_2}, \ldots \frac{dW}{dp_n}, p_1, p_2, \ldots p_n, t\right) = 0. \quad (66)$$

Une intégrale de l'équation (37) étant (n° 25)

$$V = \int_{t_0}^{t} (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - H dt),$$

une intégrale de l'équation en W (66) sera

$$W = \int_{t_0}^{t} (q_1 dp_1 + q_2 dp_2 + \ldots + q_n dp_n + H dt); \quad (67)$$

en ajoutant, nous aurons

$$V + W = p_1 q_1 + \ldots + p_n q_n;$$

par conséquent,

$$W = -V + p_1 q_1 + \ldots + p_n q_n, \quad (68)$$

est la solution de l'équation (66) lorsque l'on aura remplacé, dans le second membre, les variables $q_1, \ldots q_n$, en fonction de $p_1, \ldots p_n$, au moyen des équations (36).

47. On peut d'ailleurs vérifier facilement que (68) est une solution de l'équation (66).

En effet, en prenant la dérivée de (68) par rapport à t, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = &- \frac{dV}{dt} - \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} - \ldots - \frac{dV}{dq_n}\frac{dq_n}{dt} \\ &+ p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i;$$

par suite,

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dV}{dt}. \quad (70)$$

De même, prenons les dérivées des deux membres de l'équation (68) par rapport à p_i; observons que V ne ren-

ferme pas explicitement $p_1, \dots p_n$, mais est fonction de $q_1, \dots q_n, \alpha_1, \dots \alpha_n$, et que $q_1, \dots q_n$ contiennent $p_1, \dots p_n$; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW}{dp_i} = &-\frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dp_i} - \frac{dV}{dq_2}\frac{dq_2}{dp_i} - \dots - \frac{dV}{dq_n}\frac{dq_n}{dp_i} \\ &+ q_i + p_1\frac{dq_1}{dp_i} + \dots + q_n\frac{dq_n}{dp_i},\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

ou bien, à cause de la relation $\frac{dV}{dq_i} = p_i$,

$$\frac{dW}{dp_i} = q_i. \quad (72)$$

En substituant les valeurs (70) et (72) de $\frac{dV}{dt}$ et de q_i dans l'équation (37), on obtient l'équation (66).

48. Dans ce cas, les intégrales du problème, ou des $2n$ équations simultanées (26), sont

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dW}{dp_1} = q_1, \dots \frac{dW}{dp_n} = q_n, \\ &\frac{dW}{d\alpha_1} = \beta'_1, \dots \frac{dW}{d\alpha_n} = \beta'_n.\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

49. Mais il est facile de démontrer que *ces constantes* β' sont *égales aux constantes* β, *en signes contraires.*

En effet, la dérivée de (68) par rapport à α_i nous donne

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW}{d\alpha_i} = &-\frac{dV}{d\alpha_i} - \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{d\alpha_i} - \dots - \frac{dV}{dq_n}\frac{dq_n}{d\alpha_i} \\ &+ p_1\frac{dq_1}{d\alpha_i} + \dots + p_n\frac{dq_n}{d\alpha_i};\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

car V contient $q_1, \dots q_n$, lesquelles, en vertu des équations

$$\frac{dV}{dq_i} = p_i,$$

sont fonctions de $\alpha_1, \dots \alpha_n$.

Or, cette équation (74) se réduit à

$$\frac{dW}{d\alpha_i} = -\frac{dV}{d\alpha_i} = -\beta_i, \tag{75}$$

et les intégrales du problème seront les $2n$ équations

$$\frac{dW}{dp_i} = q_i, \quad \frac{dW}{d\alpha_i} = -\beta_i, \tag{76}$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$, de i.

50. Ces dernières nous donneraient, de la même manière que précédemment (n° 45), la deuxième équation de *Jacobi*

$$\frac{d\beta_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{d\alpha_i}.$$

51. Considérons maintenant une fonction U de $q_1, \ldots q_n$, $\beta_1, \ldots \beta_n$, donnée par l'équation

$$U = V - \alpha_1\beta_1 - \ldots - \alpha_n\beta_n, \tag{77}$$

$\alpha_1, \ldots \alpha_n$ étant exprimées en fonction de $\beta_1, \ldots \beta_n$, au moyen des n équations (64) : cette fonction U est une solution de l'équation (37), et, si nous posons

$$\frac{dU}{d\beta_i} = const.,$$

ces constantes sont $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, en signes contraires.

52. Si nous calculons $\frac{dU}{dt}$, et $\frac{dU}{dq_i}$, il vient

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + \frac{dV}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dt} - \beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} - \ldots - \beta_n\frac{d\alpha_n}{dt};$$

car, V contient $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ qui renferment t, puisque les équations (64) renferment t. Ces mêmes relations (64) transforment cette dernière équation en

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt}. \tag{78}$$

De même, V renfermant $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ qui contiennent $q_1, \ldots q_n$,

$$\frac{dU}{dq_i} = \frac{dV}{dq_i} + \frac{dV}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dq_i} + \ldots + \frac{dV}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dq_i} - \beta_1\frac{d\alpha_1}{dq_i} - \ldots - \beta_n\frac{d\alpha_n}{dq_i},$$

et, en réduisant,

$$\frac{dU}{dq_i} = \frac{dV}{dq_i}. \tag{79}$$

Par conséquent, U sera une solution de l'équation (37), U étant exprimée en fonction de $q_1, \ldots q_n$, $\beta_1, \ldots \beta_n$, et la solution des équations canoniques sera alors

$$\frac{dU}{d\beta_i} = \alpha'_i, \quad \frac{dU}{dq_i} = p_i,$$

pour les valeurs de i égales à $1, 2, \ldots n$.

53. Démontrons actuellement que $\alpha'_i = -\alpha_i$. On a

$$\frac{dU}{d\beta_i} = \frac{dV}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\beta_i} + \ldots + \frac{dV}{d\alpha_n}\frac{d\alpha_n}{d\beta_i} - \alpha_i - \beta_1\frac{d\alpha_1}{d\beta_i} - \ldots - \beta_n\frac{d\alpha_n}{d\beta_i},$$

relation qui se réduit à

$$\frac{dU}{d\beta_i} = -\alpha_i; \tag{80}$$

la solution du problème est donc donnée par les $2n$ intégrales

$$\frac{dU}{dq_i} = p_i, \quad \frac{dU}{d\beta_i} = -\alpha_i. \tag{81}$$

De ces équations on déduira facilement la troisième formule de *Jacobi* :

$$\frac{d\alpha_i}{dp_k} = \frac{dq_k}{d\beta_i}.$$

54. Enfin, on obtiendra encore une solution Y du pro-

blème en remplaçant dans (77), p par q et réciproquement; les intégrales seront alors

$$\frac{dY}{dp_i} = q_i, \quad \frac{dY}{d\beta_i} = -\alpha_i, \tag{82}$$

desquelles on déduira la quatrième formule de *Jacobi* :

$$\frac{d\alpha_i}{dq_k} = -\frac{dp_k}{d\beta_i}.$$

55. Les propriétés que nous avons démontrées dans les n^{os} précédents se résument dans le théorème remarquable suivant :

THÉORÈME. — *Soit*

$$V(q_1, q_2 \dots q_n, \alpha_1, \dots \alpha_n, t),$$

une fonction des $2n + 1$ *quantités* $q_1, \dots q_n, \alpha_1, \dots \alpha_n, t$; *au moyen des équations*

$$\frac{dV}{dq_1} = p_1, \dots \frac{dV}{dq_n} = p_n,$$
$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \dots \frac{dV}{d\alpha_n} = \beta_n,$$

exprimons d'abord les quantités $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, *en fonction de* $\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n, t$, *et prenons les dérivées partielles de ces quantités par rapport à* α_k *et* β_k. *Résolvons ensuite ces mêmes équations par rapport à* $\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n$, *en fonction de* $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t$, *et prenons les dérivées partielles par rapport à* p_i *et* q_i; *nous aurons les quatre relations*

$$\frac{dp_i}{d\alpha_k} = \frac{d\beta_k}{dq_i}, \quad \frac{dp_i}{d\beta_k} = -\frac{d\alpha_k}{dq_i},$$
$$\frac{dq_i}{d\beta_k} = \frac{d\alpha_k}{dp_i}, \quad \frac{dq_i}{d\alpha_k} = -\frac{d\beta_k}{dp_i}.$$

V.

THÉORÈMES DE LAGRANGE ET DE POISSON.

—

56. Les équations canoniques étant (n° 22)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

dans lesquelles

$$H = F(t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n),$$

nous savons que les intégrales, au nombre de $2n$, contiennent $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n$. On peut, comme nous l'avons déjà remarqué (n° 44), les résoudre par rapport aux variables $p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$, en fonction de $\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n, t$, ou par rapport aux constantes $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n$, en fonction de $t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$.

Dans la première hypothèse, il existe une relation due à *Lagrange;* elle donne

$$\frac{dp_1}{d\alpha}\frac{dq_1}{d\beta} - \frac{dp_1}{d\beta}\frac{dq_1}{d\alpha} + \ldots + \frac{dp_n}{d\alpha}\frac{dq_n}{d\beta} - \frac{dp_n}{d\beta}\frac{dq_n}{d\alpha} = const.,$$

ou, sous une forme symbolique,

$$[\alpha, \beta] = const. \quad (83)$$

57. *Démonstration.* — Considérons la fonction H, et supposons que l'on y remplace les inconnues en fonction de t, et des $2n$ constantes, parmi lesquelles se trouvent

α, β : cela posé, la démonstration repose sur l'identité

$$\frac{d^2H}{d\alpha d\beta} = \frac{d^2H}{d\beta d\alpha}.$$

Nous aurons

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{dH}{dq_1}\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{d\alpha} + \ldots + \frac{dH}{dq_n}\frac{dq_n}{d\alpha} + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{d\alpha},$$

ou, en vertu des équations canoniques,

$$\frac{dH}{d\alpha} = -\frac{dp_1}{dt}\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dt}\frac{dp_1}{d\alpha} + \ldots - \frac{dp_n}{dt}\frac{dq_n}{d\alpha} + \frac{dq_n}{dt}\frac{dp_n}{d\alpha}; \quad (84)$$

par suite,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2H}{d\alpha d\beta} = &-\frac{d^2p_1}{dtd\beta}\frac{dq_1}{d\alpha} - \frac{dp_1}{dt}\frac{d^2q_1}{d\alpha d\beta} + \frac{d^2q_1}{dtd\beta}\frac{dp_1}{d\alpha}\\ &+\frac{dq_1}{dt}\frac{d^2p_1}{d\alpha d\beta} + \ldots - \frac{d^2p_n}{dtd\beta}\frac{dq_n}{d\alpha} - \frac{dp_n}{dt}\frac{d^2q_n}{d\alpha d\beta}\\ &+\frac{d^2q_n}{dtd\beta}\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dq_n}{dt}\frac{d^2p_n}{d\alpha d\beta};\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

nous aurions, de la même manière,

$$\frac{dH}{d\beta} = \frac{dH}{dq_1}\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{d\beta} + \ldots + \frac{dH}{dq_n}\frac{dq_n}{d\beta} + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{d\beta},$$

d'où

$$\frac{dH}{d\beta} = -\frac{dp_1}{dt}\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dt}\frac{dp_1}{d\beta} + \ldots - \frac{dp_1}{dt}\frac{dq_n}{d\beta} + \frac{dq_n}{dt}\frac{dp_n}{d\beta}, \quad (86)$$

et

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2H}{d\beta d\alpha} = &-\frac{d^2p_1}{dtd\alpha}\frac{dq_1}{d\beta} - \frac{dp_1}{dt}\frac{d^2q_1}{d\beta d\alpha} + \frac{d^2q_1}{dtd\alpha}\frac{dp_1}{d\beta}\\ &+\frac{dq_1}{dt}\frac{d^2p_1}{d\beta d\alpha} + \ldots - \frac{d^2p_n}{dtd\alpha}\frac{dq_1}{d\beta} - \frac{dp_n}{dt}\frac{d^2q_n}{d\beta d\alpha}\\ &+\frac{d^2q_n}{dtd\alpha}\frac{dp_n}{d\beta} + \frac{dq_n}{dt}\frac{d^2p_n}{d\beta d\alpha}.\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

En égalant les deux expressions (85) et (87), on trouve

$$-\frac{d^2p_1}{dtd\beta}\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{d^2p_1}{dtd\alpha}\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{d^2q_1}{dtd\beta}\frac{dp_1}{d\alpha}-\frac{d^2q_1}{dtd\alpha}\frac{dp_1}{d\beta}+\ldots=0. \quad (88)$$

Or, cette expression n'est autre chose que

$$\frac{d}{dt}[\alpha,\beta]=0; \quad (89)$$

on en tire

$$[\alpha,\beta]=const.,$$

ce qui démontre la proposition.

58. Il existe un théorème analogue à celui de *Lagrange*, mais beaucoup plus important : ce théorème, découvert par *Poisson* (*), suppose les intégrales résolues par rapport aux constantes α, β. On l'énonce ainsi :

THÉORÈME. — *Si l'on connaît deux intégrales*

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\varphi(t,q_1,\ldots q_n,\ p_1,\ldots p_n),\\ \beta&=\psi(t,q_1,\ldots q_n,\ p_1,\ldots p_n),\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

résolues par rapport à α, β, l'expression

$$(\alpha,\beta)=\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1}-\frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1}+\ldots+\frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n}-\frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n},$$

sera constante pendant toute la durée du mouvement.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver que

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt}=0, \quad (91)$$

en vertu des équations canoniques.

(*) POISSON, *Sur la variation des constantes arbitraires*, etc., JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 15e cahier.

On peut le faire par une simple vérification, comme M. *Bertrand* (*), ou directement comme *Jacobi* (**), et M. *Donkin* (***).

59. Avant de passer à la démonstration de cette formule, nous devons faire observer que, d'après la notation de *Poisson* (n° 11), on a

$$\left.\begin{aligned} (\alpha,\alpha)=0,\quad (\beta,\beta)=0,\\ (\alpha,\beta)=-(\beta,\alpha),\quad (-\alpha,\beta)=-(\alpha,\beta). \end{aligned}\right\}(92)$$

60. En outre, nous ferons remarquer les deux formules suivantes, faciles à démontrer.

Si l'on désigne par φ, ψ, θ trois fonctions quelconques des variables $t, p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$, on a (****)

$$(\varphi,(\psi,\theta))+(\psi,(\theta,\varphi))+(\theta,(\varphi,\psi))=0; \qquad (93)$$

si l'on cherche la dérivée partielle de (φ, ψ), par rapport à l'une quelconque des variables, $t, p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$, on aura, en désignant cette variable par ξ,

$$\frac{d(\varphi,\psi)}{d\xi}=\left(\frac{d\varphi}{d\xi},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{d\psi}{d\xi}\right)\ (*****). \qquad (94)$$

61. Cela posé, nous donnerons la démonstration de M. *Donkin*, la plus simple et la plus élégante de toutes. Nous aurons, en prenant la dérivée totale de (α, β) par rapport à t,

(*) LAGRANGE, *Mécanique analytique*, t. I, note 7.

(**) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 421 et 426.

(***) DONKIN, *On the differential equations of dynamics*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1854.

(****) DONKIN, *On the differential equations of dynamics*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1854, p. 92.

(*****) *Idem.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d(\alpha,\beta)}{dt} + \frac{d(\alpha,\beta)}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d(\alpha,\beta)}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}\ (*)\\ + \frac{d(\alpha,\beta)}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \ldots + \frac{d(\alpha,\beta)}{dp_n}\frac{dp_n}{dt};\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

or, en vertu des équations canoniques, il vient

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d(\alpha,\beta)}{dt} + \frac{d(\alpha,\beta)}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} - \frac{d(\alpha,\beta)}{dp_1}\frac{dH}{dq_1}\\ + \ldots + \frac{d(\alpha,\beta)}{dq_n}\frac{dH}{dp_n} - \frac{d(\alpha,\beta)}{dp_n}\frac{dH}{dq_n}.\end{aligned}\right\} \quad (96)$$

ou bien

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d(\alpha,\beta)}{dt} + ((\alpha,\beta),\mathrm{H}). \quad (97)$$

Mais, on sait, d'après la relation (94), que la dérivée partielle du second membre est

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt},\beta\right) + \left(\alpha,\frac{d\beta}{dt}\right);$$

par conséquent, la formule (97) devient

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt},\beta\right) + \left(\alpha,\frac{d\beta}{dt}\right) + ((\alpha,\beta),\mathrm{H}). \quad (98)$$

Puisque les fonctions α, β sont des intégrales du système (26), nous aurons (n° 23)

$$\frac{d\alpha}{dt} + (\alpha,\mathrm{H}) = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (\beta,\mathrm{H}) = 0,$$

(*) Dans les formules (95), (96), (97) et (98) le $\frac{d(\alpha,\beta)}{dt}$ du premier membre est une dérivée totale, celui du second membre une dérivée partielle.

L'équation (98) devient alors

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = -((\alpha, H), \beta) - (\alpha, (\beta, H)) + ((\alpha, \beta), H),$$

ou, à cause des relations (92),

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = ((H, \alpha), \beta) + ((\beta, H), \alpha) + ((\alpha, \beta), H);$$

mais, d'après la formule (93), le second membre de cette dernière équation est nul, et, par conséquent

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = 0;$$

d'où

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

ce qui démontre la proposition.

62. On peut donner au théorème de *Poisson* plus de précision : α_i et β_i étant deux *constantes conjuguées*, il vient

$$(\alpha_i, \beta_i) = \pm 1, \tag{99}$$

tandis que

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_i, \beta_{i'}) &= 0, \\ (\alpha_i, \alpha_{i'}) &= 0, \\ (\beta_i, \beta_{i'}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

En effet, l'on a

$$(\alpha_i, \beta_i) = \frac{d\alpha_i}{dq_1}\frac{d\beta_i}{dp_1} - \frac{d\alpha_i}{dp_1}\frac{d\beta_i}{dq_1} + \ldots + \frac{d\alpha_i}{dq_n}\frac{d\beta_i}{dp_n} - \frac{d\alpha_i}{dp_n}\frac{d\beta_i}{dq_n},$$

ou, en vertu des équations de *Jacobi* (n° 55),

$$(\alpha_i, \beta_i) = -\left(\frac{d\alpha_i}{dq_1}\frac{dq_1}{d\alpha_i} + \frac{d\alpha_i}{dp_1}\frac{dp_1}{d\alpha_i} + \ldots + \frac{d\alpha_i}{dq_n}\frac{dq_n}{d\alpha_i} + \frac{d\alpha_i}{dp_n}\frac{dp_n}{d\alpha_i}\right);$$

on déduit de là

$$(\alpha_i, \beta_i) = -\frac{d\alpha_i}{d\alpha_i} = -1;$$

car,

$$\alpha_i = \varphi(t, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

et, en remplaçant dans α_i, p et q par leurs valeurs, en fonction de α, β, t, on a une identité, et la dérivée de α_i, par rapport à α_i, est l'unité.

63. Si l'on remplace β_i par $\beta_{i'}$, on aura

$$(\alpha_i, \beta_{i'}) = -\frac{d\alpha_i}{d\alpha_{i'}} = 0,$$

puisque la dérivée de α_i, par rapport à $\alpha_{i'}$, est nulle.

De même,

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_{i'}) &= \frac{d\alpha_i}{dq_1}\frac{d\alpha_{i'}}{dp_1} - \frac{d\alpha_i}{dp_1}\frac{d\alpha_{i'}}{dq_1} + \dots + \frac{d\alpha_i}{dq_n}\frac{d\alpha_{i'}}{dp_n} - \frac{d\alpha_i}{dp_n}\frac{d\alpha_{i'}}{dq_n} \\ &= \frac{d\alpha_i}{dq_1}\frac{dq_1}{d\beta_{i'}} + \frac{d\alpha_i}{dp_1}\frac{dp_1}{d\beta_{i'}} + \dots + \frac{d\alpha_i}{dq_n}\frac{dq_n}{d\beta_{i'}} + \frac{d\alpha_i}{dp_n}\frac{dp_n}{d\beta_{i'}} \\ &= \frac{d\alpha_i}{d\beta_{i'}} = 0,\end{aligned}$$

et

$$(\beta_i, \beta_{i'}) = -\frac{d\beta_i}{d\alpha_{i'}} = 0.$$

64. *Remarque.* — D'après la notation de *Poisson*,

$$(\alpha_i, \beta_i) = -(\beta_i, \alpha_i) = -1. \qquad (101)$$

D'après la notation de M. *Donkin* (n° 11),

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d(\alpha_i, \beta_i)}{d(q_k, p_k)} = -1, \qquad (102)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d(\alpha_i, \beta_{i'})}{d(q_k, p_k)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d(\alpha_i, \alpha_{i'})}{d(q_k, p_k)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d(\beta_i, \beta_{i'})}{d(q_k, p_k)} = 0. \qquad (103)$$

65. En général, si γ_1 et γ_2 sont deux fonctions de $\alpha_1, \dots \alpha_n$, $\beta_1, \dots \beta_n$, telles que

$$\gamma_1 = F_1(\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n),$$
$$\gamma_2 = F_2(\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n),$$

nous aurons

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{dF_1}{dq_1}\frac{dF_2}{dp_1} - \frac{dF_1}{dp_1}\frac{dF_2}{dq_1} + \dots + \frac{dF_1}{dq_n}\frac{dF_2}{dp_n} - \frac{dF_1}{dp_n}\frac{dF_2}{dq_n}$$
$$= \left(\frac{dF_1}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dq_1} + \frac{dF_1}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dq_1} + \dots\right)\left(\frac{dF_2}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_1} + \frac{dF_2}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dp_1} + \dots\right)$$
$$- \left(\frac{dF_1}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dp_1} + \frac{dF_1}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dp_1} + \dots\right)\left(\frac{dF_2}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dq_1} + \frac{dF_2}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dq_1} + \dots\right)$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ;$$

en effectuant les réductions, les termes contenant deux α ou deux β avec les mêmes indices se détruisent; en outre, la quantité

$$\frac{dF_1}{d\alpha_1}\frac{dF_2}{d\alpha_2} - \frac{dF_1}{d\alpha_2}\frac{dF_2}{d\alpha_1},$$

sera multipliée par

$$\frac{d\alpha_1}{dq_1}\frac{d\alpha_2}{dp_1} - \frac{d\alpha_1}{dp_1}\frac{d\alpha_2}{dq_1} + \dots = (\alpha_1, \alpha_2),$$

de sorte que l'on aura

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{r, r'=1}^{r, r'=2n} (\alpha_r, \alpha_{r'})\left(\frac{dF_1}{d\alpha_r}\frac{dF_2}{d\alpha_{r'}} - \frac{dF_1}{d\alpha_{r'}}\frac{dF_2}{d\alpha_r}\right), \qquad (104)$$

en représentant les constantes par $\alpha_1, \dots \alpha_{2n}$.

Or, comme $(\alpha_m, \alpha_{m'})$ est égal à l'unité ou à zéro, suivant que α_m et $\alpha_{m'}$ sont deux *constantes conjuguées* ou non, il viendra, en prenant i pour indice,

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dF_1}{d\alpha_i}\frac{dF_2}{d\beta_i} - \frac{dF_1}{d\beta_i}\frac{dF_2}{d\alpha_i}\right). \qquad (105)$$

66. *Remarque.* — Dans les opérations précédentes, nous

avons toujours supposé que les équations renferment le temps explicitement. Dans l'équation $(\alpha, \beta) = const.$, de *Poisson*, α, β ne renfermaient pas le temps. Mais cette restriction est, comme on vient de le voir, complétement inutile.

VI.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

—

67. *Application* I. — *Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement sont

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

La fonction des forces est

$$U = \frac{\mu}{r};$$

puisqu'il n'y a pas de liaisons, les variables indépendantes sont x et y, et nous aurons, pour la fonction que nous avons désignée par T,

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2);$$

d'où

$$\frac{dT}{dx'} = x', \quad \frac{dT}{dy'} = y',$$

et

$$p_1 = x', \quad p_2 = y'.$$

Par suite, l'équation des forces vives

$$T - U = H,$$

est

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu}{r} = h, \qquad (107)$$

et l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction V sera

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = h, \qquad (108)$$

équation dont il faut trouver une intégrale complète.

68. Nous pouvons simplifier la question en changeant de variables. Posons

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad (109)$$

r et φ étant les nouvelles variables indépendantes.

Pour transformer le premier terme de l'équation (108), nous écrirons les équations (109) sous la forme

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r};$$

or,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{y}{r^2}\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{x}{r^2}\frac{dV}{d\varphi},$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2$$

L'équation transformée de (108), dont il faut trouver une intégrale complète contenant deux constantes arbitraires, est donc

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=h. \qquad (110)$$

69. Nous pouvons déterminer une solution particulière, en posant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2-\frac{\mu}{r}=h-\frac{\beta}{r^2},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2=+\beta. \qquad (111)$$

Cherchons d'abord une fonction de r satisfaisant à la première de ces équations, et renfermant une constante, qui sera une fonction de φ; nous aurons

$$\frac{dV}{dr}=\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{2\beta}{r^2}},$$

d'où

$$V=\int dr\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{2\beta}{r^2}}+\gamma',$$

γ' étant indépendant de r.

La seconde équation (111) nous donne

$$\frac{dV}{d\varphi}=\sqrt{2\beta},$$

d'où

$$V=\varphi\sqrt{2\beta}.$$

Si nous prenons $\gamma'=\varphi\sqrt{2\beta}$, nous aurons la valeur de V :

$$V=\int dr\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{2\beta}{r^2}}+\varphi\sqrt{2\beta}+\gamma, \qquad (112)$$

laquelle est une intégrale complète de l'équation en V (110),

intégrale qui, comme nous l'avons vu, suffira pour trouver la solution du problème proposé.

70. Nous n'avons plus qu'à former les deux équations

$$\frac{dV}{d\beta} = k,$$

$$\frac{dV}{dh} - t = g,$$

ce qui nous donne, pour les intégrales des équations du mouvement,

$$k = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{\varphi}{\sqrt{2\beta}},$$

$$t + g = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}}},$$

ou, comme $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$:

$$\left.\begin{aligned} k &= -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x}, \\ t + g &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

71. On peut encore arriver à la solution du problème d'une autre manière : dans le cas actuel, on connaît une intégrale ne renfermant pas explicitement le temps : c'est celle que donne *le principe des aires.*

Les équations du mouvement étant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \tag{106}$$

l'équation des forces vives est

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu}{r} = h; \tag{107}$$

par suite,

$$\frac{dH}{dx'} = x', \quad \frac{dH}{dy'} = y',$$
$$\frac{dH}{dx} = \frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{dH}{dy} = \frac{\mu y}{r^3}.$$

Les équations (106) peuvent donc être mises sous la forme canonique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dH}{dy'},$$
$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dH}{dy}.$$

Ces équations contiennent quatre fonctions inconnues x, y, x', y' de la variable t; par conséquent, nous devons (n° 14) chercher, outre l'intégrale des forces vives, une autre intégrale qui ne renferme pas le temps explicitement : D'après le principe des aires, cette intégrale est

$$\varphi = xy' - yx' = \alpha;$$

et l'on voit immédiatement qu'elle vérifie la condition

$$(H, \varphi) = 0,$$

attendu que

$$\frac{dH}{dx}\frac{d\varphi}{dx'} - \frac{dH}{dx'}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dH}{dy}\frac{d\varphi}{dy'} - \frac{dH}{dy'}\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

72. Des deux intégrales H et φ, nous pouvons déduire

les valeurs de x' et de y' qui rendront $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte; nous aurons ainsi

$$x' = \frac{-\alpha y \pm x\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2}}{r^2},$$

$$y' = \frac{\alpha x \pm y\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2}}{r^2};$$

donc,

$$dV = \alpha\frac{xdy-ydx}{r^2} \pm \frac{xdx+ydy}{r^2}\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2};$$

d'où, en intégrant,

$$V = \alpha \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \int\frac{dr}{r}\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2}. \qquad (112^{bis})$$

Les intégrales du problème sont

$$\frac{dV}{d\alpha} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \mp \int\frac{\alpha dr}{r\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2}} = k,$$

$$\frac{dV}{dh} - t = \pm\int\frac{rdr}{\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2-\alpha^2}} - t = g;$$

ou bien,

$$\left.\begin{aligned} k &= \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \mp \int\frac{\alpha dr}{r^2\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{\alpha^2}{r^2}}},\\ t+g &= \pm\int\frac{dr}{\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{\alpha^2}{r^2}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (113^{bis})$$

formules qui ne diffèrent pas des équations (113).

73. *Application* II. — *Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

Soient l'origine des coordonnées au point fixe, ξ, η, ζ trois axes fixes rectangulaires passant par ce point, x, y, z les axes principaux du corps pour le point fixe, A, B, C les moments principaux d'inertie, et p, q, r les vitesses angulaires autour des axes principaux.

Désignons par ψ l'angle que fait l'axe ξ avec l'intersection du plan des xy et des $\xi\eta$, φ l'angle de cette intersection avec l'axe des x, θ l'angle des deux plans $\xi\eta$ et xy. Nous aurons la somme des forces vives

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

en posant (*)

$$p = \sin\varphi \sin\theta . \psi' - \cos\varphi . \theta',$$
$$q = \cos\varphi \sin\theta . \psi' + \sin\varphi . \theta',$$
$$r = \varphi' - \cos\theta . \psi',$$

et

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta'.$$

74. Si maintenant, nous supposons avec *Poisson* (**),

$$s = \frac{dT}{d\varphi'}, \quad u = \frac{dT}{d\psi'}, \quad v = \frac{dT}{d\theta'},$$

nous aurons, puisque φ' n'entre pas dans les valeurs de p et q,

$$s = \frac{dT}{d\varphi'} = \frac{dT}{dr}\frac{dr}{d\varphi'} = Cr;$$

de même, ψ' entrant dans p, q, r,

(*) Poisson, *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires*, Journal de l'École polytechnique, 15e cahier.

(**) *Idem.*

$$u = \frac{d\mathrm{T}}{dp}\frac{dp}{d\psi'} + \frac{d\mathrm{T}}{dq}\frac{dq}{d\psi'} + \frac{d\mathrm{T}}{dr}\frac{dr}{d\psi'}$$
$$= \mathrm{B}q\cos\theta\cos\varphi + \mathrm{A}p\sin\theta\sin\varphi - \mathrm{C}r\cos\theta,$$

et comme θ' n'entre pas dans r,

$$v = \frac{d\mathrm{T}}{dp}\frac{dp}{d\theta'} + \frac{d\mathrm{T}}{dq}\frac{dq}{d\theta'} = -\mathrm{A}p\cos\varphi + \mathrm{B}q\sin\varphi;$$

d'où

$$\mathrm{A}p = (u + s\cos\theta)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - v\cos\varphi,$$
$$\mathrm{B}q = (u + s\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + v\sin\varphi,$$
$$\mathrm{C}r = s.$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{T} = {} & \frac{1}{\mathrm{A}}\left[(u + s\cos\theta)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - v\cos\varphi\right]^2 \\ & + \frac{1}{\mathrm{B}}\left[(u + s\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + v\sin\varphi\right]^2 \\ & + \frac{1}{\mathrm{C}}s^2. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

Si nous remplaçons dans cette équation u, v, s, par

$$s = \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi},$$
$$u = \frac{d\mathrm{V}}{d\psi},$$
$$v = \frac{d\mathrm{V}}{d\theta},$$

et si nous désignons par U la fonction des forces, et par h la constante des forces vives, le problème sera ramené à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\left[\left(\frac{dV}{d\psi}+\frac{dV}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}-\frac{dV}{d\theta}\cos\varphi\right]^2\\
&+\frac{1}{B}\left[\left(\frac{dV}{d\psi}+\frac{dV}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}+\frac{dV}{d\theta}\sin\varphi\right]^2\\
&+\frac{1}{C}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2=2(U+h).
\end{aligned}\right\}\quad(115)$$

75. L'intégration de cette équation, dans le cas où la fonction U est nulle, c'est-à-dire lorsque le corps est soumis à une impulsion instantanée, se ramène à de simples quadratures.

76. La solution peut alors être présentée de la manière suivante :

Si nous désignons par a, b, c les cosinus des angles que fait l'axe des x avec les axes ξ, η, ζ, a', b', c' les angles de l'axe des y avec ξ, η, ζ, etc., les trois équations de la *conservation des aires* nous donnent

$$\left.\begin{aligned}
Aap+Bbq+Ccr&=\alpha,\\
Aa'p+Bb'q+Cc'r&=\beta,\\
Aa''p+Bb''q+Cc''r&=\gamma.
\end{aligned}\right\}\quad(116)$$

Or, les formules d'*Euler* étant

$$\begin{aligned}
a&=\cos\theta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi,\\
b&=\cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi,\\
c&=\sin\theta\sin\psi,\\
a'&=\cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi,\\
b'&=\cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi,\\
c'&=\sin\theta\cos\psi,\\
a''&=-\sin\theta\sin\varphi,\\
b''&=-\sin\theta\cos\varphi,\\
c''&=\cos\theta,
\end{aligned}$$

les équations (116) prendront la forme

$$\left.\begin{aligned} -v\cos\psi + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}(s + u\cos\theta) &= \alpha, \\ v\sin\psi + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}(s + u\cos\theta) &= \beta, \\ u &= \gamma. \end{aligned}\right\} \quad (116^{bis})$$

En faisant la somme des carrés, et observant que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2,$$

on trouve

$$v^2 + u^2 + \frac{(s + u\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = k^2,$$

et nous pouvons prendre pour intégrales du problème les trois équations

$$\left.\begin{aligned} u &= \gamma, \\ u^2 + v^2 + \frac{(s + u\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} &= k^2, \\ 2h = \frac{1}{A}\left[(u + s\cos\theta)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - v\cos\varphi\right]^2 &+ \frac{1}{B}\left[(u + s\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + v\sin\varphi\right]^2 \\ &+ \frac{1}{C}s^2, \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

qui satisfont aux conditions

$$(\gamma, h) = 0, \quad (h, k) = 0, \quad (k, \gamma) = 0.$$

Ces équations (117) serviront à déterminer u, v, s en fonction de θ, φ, ψ : nous pourrons donc, en remplaçant u, v, s par $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\theta}$, $\frac{dV}{d\varphi}$, déterminer la fonction V par une simple intégration; les trois autres intégrales du problème

seront données par les équations

$$\frac{dV}{dh} = t - t_0, \quad \frac{dV}{d\gamma} = \alpha_1, \quad \frac{dV}{dk} = \alpha_2,$$

t_0, α_1, α_2 étant des constantes arbitraires.

Nous aurons ainsi

$$\left.\begin{aligned} V &= \int (s\,d\varphi + u\,d\psi + v\,d\theta), \\ \frac{dV}{dh} &= \int \left(\frac{ds}{dh}\,d\varphi + \frac{du}{dh}\,d\psi + \frac{dv}{dh}\,d\theta\right) = t - t_0, \\ \frac{dV}{d\gamma} &= \int \left(\frac{ds}{d\gamma}\,d\varphi + \frac{du}{d\gamma}\,d\psi + \frac{dv}{d\gamma}\,d\theta\right) = \alpha_1, \\ \frac{dV}{dk} &= \int \left(\frac{ds}{dk}\,d\varphi + \frac{du}{dk}\,d\psi + \frac{dv}{dk}\,d\theta\right) = \alpha_2. \end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Mais, en général, les équations (117) ne peuvent être résolues par rapport à u, v, s : car, l'élimination de s et u conduit à une équation du quatrième degré en v.

77. Lorsque $A = B$, les équations (117) donnent facilement

$$\left.\begin{aligned} u &= \gamma, \\ s^2 &= \frac{C}{C - A}(k^2 - 2Ah), \\ v^2 &= \frac{1}{\sin\theta}(k^2 - u^2 - s^2 + 2us\cos\theta - k^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

ou, en posant,

$$\left.\begin{aligned} u &= \gamma = k\cos i, \quad s = k\cos j, \\ v^2 &= \frac{k}{\sin\theta}(1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i\cos j\cos\theta - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

on a alors

$$V = k(\psi\cos i + \varphi\cos j) + \int \frac{kQ}{\sin\theta}\,d\vartheta, \quad (121)$$

en posant

$$Q = (1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

78. Observons que l'équation

$$s^2 = \frac{C}{C - A}(k^2 - 2Ah) = k^2 \cos^2 j,$$

nous donne

$$k^2 = \frac{2ACh}{C - (C - A)\cos^2 j};$$

d'où

$$\frac{dk}{dh} = \frac{k}{2h}, \quad \frac{dk}{d.\cos i} = 0, \quad \frac{dk}{d.\cos j} = \frac{(C - A)k^3 \cos j}{2ACh};$$

les intégrales du problème seront alors

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dh} = \frac{k}{2h}[\psi\cos i + \varphi\cos j] + \int\frac{Q}{\sin\theta}d\theta = t - t_0,\\
&\frac{dV}{d\cos i} = k\left[\psi + \int\frac{\cos j\cos\theta - \cos i}{Q\sin\theta}d\theta\right] = \alpha_1,\\
&\frac{dV}{d\cos j} = \frac{(C-A)k^3\cos j}{2ACh}\left[\psi\cos i + \varphi\cos j + \int\frac{Q}{\sin\theta}d\theta\right]\\
&\qquad + k\left[\varphi + \int\frac{\cos i\cos\theta - \cos j}{Q\sin\theta}d\theta\right] = \alpha_2.
\end{aligned}\right\} \quad (122)$$

L'intégrale $\int\frac{Qd\theta}{\sin\theta}$ se présentant sous une forme compliquée, nous pouvons l'éliminer entre la première et la troisième des équations (122); nous aurons

$$\varphi + \int\frac{\cos i\cos\theta - \cos j}{Q\sin\theta}d\theta = \frac{\alpha_2}{k} - \frac{C-A}{AC}k\cos j.(t - t_0); \quad (123)$$

si ensuite nous éliminons ψ entre la première et la seconde de ces mêmes équations (122), il vient

$$\left.\begin{aligned}\cos j\left[\psi+\int\frac{\cos i\cos\theta-\cos j}{Q\sin\theta}\,d\theta+\int\frac{\sin\theta d\theta}{Q}\right]\\ =\frac{2h}{k}(t-t_0)-\frac{\alpha_1\cos i}{k}\end{aligned}\right\}\quad(124)$$

Ces deux dernières (123) et (124) nous donnent

$$\int\frac{\sin\theta d\theta}{Q}=\frac{k}{A}(t-t_0)-\frac{\alpha_1\cos i+\alpha_2\cos j}{k};\qquad(125)$$

si nous joignons aux équations (124) et (125) la seconde équation (122)

$$k\left[\psi+\int\frac{\cos j\cos\theta-\cos i}{Q\sin\theta}\,d\theta\right]=\alpha_1,$$

nous aurons, sous une forme simple, les trois intégrales cherchées.

79. *Application* III. — *Mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes en raison inverse des carrés des distances, le point se mouvant dans un plan passant par les deux centres.*

Prenons le centre O pour origine des coordonnées : soit C l'autre centre dont les coordonnées sont a et b; le point mobile m sera attiré vers le centre O par la force $\frac{\mu_1}{q^2_1}$, vers le centre C par la force $\frac{\mu_2}{q^2_2}$, si nous posons $Om=q_1$, $Cm=q_2$.

Nous devons calculer la fonction

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2);\qquad(126)$$

or,

$$x^2+y^2=q^2_1,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=q^2_2;$$

d'où

$$xx'+yy'=q_1q'_1,$$
$$(x-a)x'+(y-b)y'=q_2q'_2;$$

par suite,

$$x' = \frac{q_1 q'_1 (y-b) - q_2 q'_2 y}{x(y-b) - y(x-a)} = \frac{q_1 q'_1 (y-b) - q_2 q'_2 y}{ay - bx},$$

$$y' = \frac{x q_2 q'_2 - (x-a) q_1 q'_1}{ay - bx}.$$

En substituant dans la valeur de T, on obtient

$$T = \frac{1}{2} \frac{q^2_1 q^2_2 q'^2_2 + q^2_1 q^2_2 q'^2_1 - 2 q_1 q'_1 q_2 q'_2 [y(y-b) + x(x-a)]}{(ay - bx)^2};$$

or, si nous faisons $OC = l$, nous aurons

$$2[y(y-b) + x(x-a)]$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - 2by - 2ax = q_1^2 + q_2^2 - l^2,$$

d'où

$$T = \frac{1}{2} \frac{q^2_1 q^2_2 (q'^2_1 + q'^2_2) - q_1 q'_1 q_2 q'_2 (q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{4S^2}, \quad (127)$$

en observant que

$$ay - bx = 2S,$$

S étant l'aire du triangle OCm.

Mais,

$$S^2 = \frac{1}{16} (q_1 + q_2 + l)(q_1 + q_2 - l)(q_1 + l - q_2)(q_2 + l - q_1)$$

$$= \frac{1}{16} [4 q^2_1 q^2_2 - (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2];$$

donc,

$$T = 2 \frac{q^2_1 q^2_2 (q'^2_1 + q'^2_2) - q_1 q_2 q'_1 q'_2 (q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{4 q^2_1 q^2_2 - (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2}. \quad (128)$$

80. Si maintenant nous posons

$$p_1 = \frac{dT}{dq'_1}, \qquad p_2 = \frac{dT}{dq'_2},$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 2\,.\,\frac{2q^2_1q^2_2q'_1 - q_1q_2q'_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{\mathrm{D}},\\ p_2 &= 2\,.\,\frac{2q^2_1q^2_2q'_2 - q_1q'_1q_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{\mathrm{D}}, \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

en faisant

$$\mathrm{D} = 4q^2_1q^2_2 - (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2.$$

De ces deux équations (129), on déduit facilement

$$q'_1 = \frac{\mathrm{D}p_1q^2_1q^2_2 + \dfrac{\mathrm{D}p_2}{2}q_1q_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{4q^4_1q^4_2 - q^2_1q^2_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2},$$

$$q'_2 = \frac{\mathrm{D}p_2q^2_1q^2_2 + \dfrac{\mathrm{D}p_1}{2}q_1q_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)}{4q^4_1q^4_2 - q^2_1q^2_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2},$$

ou, en supprimant le facteur D, commun aux deux termes

$$\left.\begin{aligned} q'_1 &= p_1 + \frac{p_2}{2q_1q_2}(q^2_1 + q^2_2 - l^2),\\ q'_2 &= p_2 + \frac{p_1}{2q_1q_2}(q^2_1 + q^2_2 - l^2). \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Ces valeurs de q'_1 et q'_2 devant être substituées dans la fonction T (128), on trouve

$$\begin{aligned} 2q^2_1q^2_2(q'^2_1 + q'^2_2) &= \frac{p^2_1 + p^2_2}{2}\left[4q^2_1q^2_2 + (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2\right]\\ &\quad + 4p_1p_2q_1q_2(q^2_1 + q^2_2 - l^2),\\ 2q_1q_2q'_1q'_2 &= \frac{p_1p_2}{2q_1q_2}\left[4q^2_1q^2_2 + (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2\right]\\ &\quad + (p^2_1 + p^2_2)(q^2_1 + q^2_2 - l^2), \end{aligned}$$

et, par suite, la valeur de T devient, par la suppression du facteur commun $\mathrm{D} = 4q^2_1q^2_2 - (q^2_1 + q^2_2 - l^2)^2$,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[p^2_1 + p^2_2 + \frac{p_1p_2}{q_1q_2}(q^2_1 + q^2_2 - l^2)\right].$$

Enfin, si l'on remplace p_1, p_2 par $\frac{dV}{dq_1}$, $\frac{dV}{dq_2}$, l'équation des forces vives

$$T - U = h,$$

dans laquelle

$$U = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2},$$

nous donnera

$$\left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2 + \frac{dV}{dq_1}\frac{dV}{dq_2}\left(\frac{q_1^2 + q_2^2 - l^2}{q_1 q_2}\right) = 2\left(\frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2} + h\right), \quad (131)$$

pour l'équation aux dérivées partielles, du premier ordre, dont une intégrale complète donnera la solution du problème.

81. *Remarque.* — On peut arriver immédiatement à l'équation (131) de la manière suivante :

L'équation, dans le système ordinaire de coordonnées, est

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2\right] = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2} + h,$$

q_1, q_2 étant exprimées en fonction de x, y.

Cherchons à transformer cette équation, en prenant q_1, q_2 pour variables indépendantes; nous aurons

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dx} + \frac{dV}{dq_2}\frac{dq_2}{dx} = \frac{dV}{dq_1}\frac{x}{q_1} + \frac{dV}{dq_2}\frac{x-a}{q_2},$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dq_1}\frac{dq_1}{dy} + \frac{dV}{dq_2}\frac{dq_2}{dy} = \frac{dV}{dq_1}\frac{y}{q_1} + \frac{dV}{dq_2}\frac{y-b}{q_2};$$

donc,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2 + 2\left(\frac{dV}{dq_1}\right)\left(\frac{dV}{dq_2}\right)\left[\frac{x(x-a) + y(y-b)}{q_1 q_2}\right],$$

et comme

$$2\left[x(x-a) + y(y-b)\right] = q_1^2 + q_2^2 - l^2,$$

l'équation aux dérivées partielles sera

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dq_1}\right)^2+\left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2+\frac{dV}{dq_1}\frac{dV}{dq_2}\left(\frac{q_1^2+q_2^2-l^2}{q_1q_2}\right)&=\frac{2\mu_1}{q_1}\\ +\frac{2\mu_2}{q_2}+2h,&\end{aligned}\right\}\quad(131)$$

comme au numéro précédent.

82. Nous devons, pour résoudre le problème, *trouver une solution de cette équation, renfermant une constante arbitraire :* or, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned}q_1q_2\left[\left(\frac{dV}{dq}\right)^2+\left(\frac{dV}{dq_2}\right)^2\right]+\frac{dV}{dq_1}\frac{dV}{dq_2}(q_1^2+q_2^2-l^2)&\\ =2\mu_1q_2+2\mu_2q_1+2hq_1q_2;&\end{aligned}\right\}\quad(132)$$

pour faire disparaître le produit q_1q_2, nous prendrons deux nouvelles variables f et g, telles que

$$q_1+q_2=f,\quad q_1-q_2=g,$$

d'où

$$q_1=\frac{f+g}{2},\quad q_2=\frac{f-g}{2},$$

et alors

$$\frac{dV}{dq_1}=\frac{dV}{df}\frac{df}{dq_1}+\frac{dV}{dg}\frac{dg}{dq_1}=\frac{dV}{df}+\frac{dV}{dg},$$
$$\frac{dV}{dq_2}=\frac{dV}{df}\frac{df}{dq_2}+\frac{dV}{dg}\frac{dg}{dq_2}=\frac{dV}{df}-\frac{dV}{dg}.$$

L'équation (132) devient

$$\frac{f^2-g^2}{2}\left[\left(\frac{dV}{df}\right)^2+\left(\frac{dV}{dg}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{dV}{df}\right)^2-\left(\frac{dV}{dg}\right)^2\right]\left(\frac{f^2+g^2}{2}-l^2\right)$$
$$=\mu_1(f-g)+\mu_2(f+g)+\frac{h}{2}(f^2-g^2),$$

ou bien

$$\left(\frac{dV}{df}\right)^2(f^2-l^2)+\left(\frac{dV}{dg}\right)^2(l^2-g^2)=\mu_1f+\mu_2g+\frac{h}{2}f^2$$
$$-\mu_1g+\mu_2f-\frac{h}{2}g^2.$$

Comme nous n'avons besoin que d'une solution particulière, nous pourrons poser

$$\left(\frac{dV}{df}\right)^2 (f^2 - l^2) = (\mu_1 + \mu_2) f + \frac{hf^2}{2} + \beta,$$
$$\left(\frac{dV}{dg}\right)^2 (l^2 - g^2) = (\mu_2 - \mu_1) g - \frac{hg^2}{2} - \beta;$$

d'où nous déduirons les valeurs de $\frac{dV}{df}$ et $\frac{dV}{dg}$, et nous aurons

$$\left.\begin{aligned} V = &\int df \frac{\sqrt{(\mu_1 + \mu_2) f + \frac{hf^2}{2} + \beta}}{\sqrt{f^2 - l^2}} \\ &+ \int dg \frac{\sqrt{(\mu_1 - \mu_2) g + \frac{hg^2}{2} + \beta}}{\sqrt{g^2 - l^2}} + C. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Les intégrales du problème sont

$$\frac{dV}{d\beta} = \gamma, \quad \frac{dV}{dh} = t - t_0.$$

L'intégrale (133) renferme deux fonctions elliptiques.

83. *Remarque.* — Si $\mu_2 = 0$, le point est attiré vers un centre fixe, et l'on doit trouver les formules ordinaires du mouvement elliptique.

84. *Application* IV. — Proposons-nous encore de déterminer *les éléments de l'orbite d'une planète, en la supposant seule en présence du soleil.*

En prenant pour plan des xy le plan de l'écliptique, pour origine le centre du soleil, et pour axe des x la ligne des équinoxes $S\gamma$, les équations différentielles du mouvement de la planète sont

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{f'\mu x}{r^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{f'\mu y}{r^3},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{f'\mu z}{r^3},\end{aligned}\right\} \quad (134)$$

dans lesquelles f' est la force avec laquelle s'attirent deux points-matériels dont la masse est égale à l'unité, situés à l'unité de distance; en outre, $\mu = (M + m)$, m étant la masse de la planète et M la masse du soleil; r est la distance Sm de la planète au soleil.

La fonction des forces étant

$$U = \frac{f'\mu}{r},$$

nous aurons

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{f'\mu}{r} = h,$$

en posant

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

Par suite, les équations du mouvement, mises sous la forme canonique, sont

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dH}{dy'}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dH}{dz'},\\ &\frac{dx'}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dH}{dy}, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dH}{dz},\end{aligned}$$

La fonction des forces ne contenant pas le temps, l'équation aux dérivées partielles, du premier ordre, de laquelle dépend la solution du problème est

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \frac{2f'\mu}{r} + 2h, \quad (135)$$

et il s'agit de trouver une intégrale complète de cette dernière, renfermant deux constantes arbitraires F et G; les intégrales définitives du problème seront alors

$$\frac{dV}{dF} = f,$$
$$\frac{dV}{dG} = g,$$
$$\frac{dV}{dh} = t + c,$$

équations qui renferment *six constantes arbitraires.*

85. Pour simplifier l'intégration de cette équation (135), nous prendrons pour variables nouvelles les coordonnées astronomiques de la planète, c'est-à-dire sa distance au soleil, sa longitude et sa latitude héliocentriques, que nous désignerons par $Sm = r$, $m\mathrm{P} = \theta$, $\gamma\mathrm{P}' = \psi$; les formules de transformation sont

$$x = r\cos\theta\cos\psi,$$
$$y = r\cos\theta\sin\psi,$$
$$z = r\sin\theta.$$

par suite,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad tg\,\psi = \frac{y}{x}, \quad \sin\theta = \frac{z}{r}.$$

Cela posé, on a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi}{dx},$$
$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi}{dy},$$
$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dz} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi}{dz};$$

or,

$$dr = \cos\theta\cos\psi\,dx + \cos\theta\sin\psi\,dy + \sin\theta dz,$$

$$d\theta = -\frac{\sin\theta\cos\psi}{r}dx - \frac{\sin\theta\sin\psi}{r}dy + \frac{\cos\theta}{r}dz,$$

$$d\psi = -\frac{\sin\psi}{r\cos\theta}dx + \frac{\cos\psi}{r\cos\theta}dy,$$

et, par conséquent, la transformée de l'équation (135) est

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 = \frac{2f'\mu}{r} + 2h, \quad (136)$$

dont on peut obtenir une intégrale complète

$$V = \varphi(r) + \varpi(\theta) + \omega(\psi).$$

Nous aurons facilement, d'après l'équation (136),

$$r^2\left[\varphi'^2(r) - \frac{2f'\mu}{r} - 2h\right] + \varpi'^2(\theta) + \frac{1}{\cos^2\theta}\omega'^2(\psi) = 0. \quad (137)$$

On en déduit

$$\omega'(\psi) = const.;$$

car, en résolvant (137) par rapport à $\omega'(\psi)$, cette valeur ne renferme pas ψ. Posons donc

$$\omega'(\psi) = F,$$

d'où

$$\omega(\psi) = F\psi.$$

Alors la somme des deux derniers termes de (137) est une constante, et l'on peut poser

$$\varpi'^2(\theta) + \frac{F^2}{\cos^2\theta} = G^2;$$

on en tire

$$\varpi'(\theta) = \sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}},$$

et

$$\varpi(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta.$$

La première partie de l'équation (137), qui dépend seulement de r, doit être égale à $-G^2$, et il vient

$$\varphi'^2(r) - \frac{2f'\mu}{r} - 2h = -\frac{G^2}{r^2};$$

par suite, en intégrant,

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2f'\mu}{r} + 2h - \frac{G^2}{r^2}}\, dr.$$

On satisfait donc à l'équation (137) par l'expression

$$\left.\begin{aligned} V = F\psi &+ \int_0^{\theta} \sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta \\ &+ \int_{r_0}^{r} \sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + \frac{2f'\mu}{r} + 2h}\, dr; \end{aligned}\right\} \quad (138)$$

par conséquent, les intégrales définitives du problème sont

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dF} &= \psi - \int_0^{\theta} \frac{F\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}}} = f, \\ \frac{dV}{dG} &= \int_0^{\theta} \frac{G\,d\theta}{\sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}}} - \int_{r_0}^{r} \frac{G\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + \frac{2f'\mu}{r} + 2h}} = g, \\ \frac{dV}{dh} &= \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + \frac{2f'\mu}{r} + 2h}} = t + c. \end{aligned}\right\} \quad (139)$$

Ces intégrales contiennent six constantes arbitraires que

nous appellerons *éléments canoniques*. Les racines de l'équation

$$2hr^2 + 2f'\mu r - G^2 = 0,$$

sont le plus grand et le plus petit rayon vecteur; la plus grande valeur de θ est donnée par

$$G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta} = 0,$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{F}{G} = \cos J,$$

J étant l'inclinaison du plan de l'orbite.

86. On peut trouver sans difficulté la signification des six *constantes canoniques*.

En effet, on a, pour les composantes de la vitesse,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz}, \tag{140}$$

de sorte que les équations des aires deviennent

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = x\frac{dV}{dy} - y\frac{dV}{dx},$$
$$\frac{ydz - zdy}{dt} = y\frac{dV}{dz} - z\frac{dV}{dy},$$
$$\frac{zdx - xdz}{dt} = z\frac{dV}{dx} - x\frac{dV}{dz},$$

en remplaçant $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$, x, y, z, en fonction des nouvelles variables, on a

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{xdy - ydx}{dt} = \frac{dV}{d\psi} = F,\\
&\frac{ydz - zdy}{dt} = \sin\psi\sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}} - F\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\psi.\\
&\frac{zdx - xdz}{dt} = -\cos\psi\sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}} - F\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Élevant au carré, ajoutant et extrayant la racine carrée, on trouve

$$\frac{1}{dt}\sqrt{(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2+(zdx-xdz)^2}=G.$$

On conclut de là que F est *la constante des aires dans le plan des* xy, et G *la constante des aires dans le plan de l'orbite.*

Observons encore que les trois équations (141) ne forment pas un système équivalent aux équations (140); on doit y joindre l'équation des forces vives

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{2f'\mu}{r}+2h.$$

La première équation (139) donne

$$\psi-f=\int_0^{\theta}\frac{F\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\sqrt{G^2-\frac{F^2}{\cos^2\theta}}}=\arcsin\frac{F\,\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{G^2-F^2}},$$

d'où

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{G^2-F^2}}{F}\sin(\psi-f);$$

de cette dernière on déduit facilement

$$\sqrt{G^2-\frac{F^2}{\cos^2\theta}}=\sqrt{G^2-F^2}\cos(\psi-f),$$

et, si l'on substitue cette valeur dans les équations (141), la deuxième et la troisième donnent

$$\frac{ydz-zdy}{dt}=\sqrt{G^2-F^2}\sin f,$$

$$\frac{zdx-xdz}{dt}=-\sqrt{G^2-F^2}\cos f;$$

ce sont les équations des aires dans les plans des yz et des xz. En joignant ces équations à la première (141), on a

$$(x \sin f - y \cos f)\sqrt{G^2 - F^2} + Fz = 0,$$

équation qui exprime que *le mouvement a lieu dans un plan* : c'est l'équation *du plan de l'orbite*. Si le plan des xy est fixe, la *ligne des nœuds* sera déterminée par l'équation

$$x \sin f - y \cos f = 0,$$

d'où

$$y = x \operatorname{tg} f.$$

De cette dernière équation on conclut que f est l'*angle de la ligne des nœuds avec l'axe des* x ; si donc N est le nœud de la planète, on aura $f = \gamma\mathrm{N}$.

La seconde des équations (139) donne

$$\arcsin \frac{G \sin \theta}{\sqrt{G^2 - F^2}} + \arccos \frac{\dfrac{G^2}{f'\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}} = g. \quad (142)$$

Introduisons une nouvelle variable w, afin d'éliminer les arcsin. et arccos., et posons

$$w = \arcsin \frac{G \sin \theta}{\sqrt{G^2 - F^2}},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \sin w &= \frac{G \sin \theta}{\sqrt{G^2 - F^2}}, \\ \cos w &= \frac{\cos \theta \sqrt{G^2 - \dfrac{F^2}{\cos^2 \theta}}}{\sqrt{G^2 - F^2}}; \end{aligned}\right\} \quad (143)$$

par suite,

$$\operatorname{tg} w = \frac{G \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{G^2 - \dfrac{F^2}{\cos^2 \theta}}}.$$

L'équation (142) devient alors

$$g - w = \operatorname{arc\,cos} \frac{\dfrac{G^2}{f'\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}},$$

ou bien

$$\frac{\dfrac{G^2}{f'\mu r} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}} = \cos(w - g);$$

d'où

$$r = \frac{\dfrac{G^2}{f'\mu}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2hG^2}{f'^2\mu^2}} \cos(w - g)}. \qquad (144)$$

Entre l'équation (144) et la deuxième équation (143), éliminons $\sqrt{G^2 - \frac{F^2}{\cos^2\theta}}$, nous aurons

$$\cos w = \cos\theta \cos(\psi - f); \qquad (143^{bis})$$

or, $\psi - f = \gamma P - \gamma N = NP$, et $\theta = mP$; donc $w = Nm$, sera la *longitude de la planète comptée dans le plan de l'orbite à partir du nœud ascendant.*

Le minimum de r a lieu lorsque $w = g$; par suite, g est *la longitude* w, dans le cas où *le rayon vecteur est minimum*, c'est-à-dire pour le *périhélie*. En désignant par p la projection du périhélie sur la sphère

$$g = Np,$$
$$w - g = Nm - Np = mp = \text{angle } mSp;$$

cet angle mSp est *l'angle polaire de la planète :* c'est *l'anomalie vraie de la planète.* Les coordonnées de la planète dans son plan seront r et $w - g = \omega$; l'équation (144) est l'équation de l'orbite entre les coordonnées polaires r et ω.

Le paramètre est $\frac{G^2}{f'\mu}$, et l'excentricité $\sqrt{1+\frac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}$: la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que h est négatif, positif ou nul.

La troisième équation définitive (139) nous donne

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2h}\sqrt{-G^2+2f'\mu r+2hr^2} \\ &-\frac{f'\mu}{2h\sqrt{-h}}\arccos\frac{2hr+f'\mu}{\sqrt{2hG^2+f'^2\mu^2}}=t+c; \end{aligned}\right\} \quad (139^{bis})$$

Si nous prenons une nouvelle variable u, appelée *anomalie excentrique*, et définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{2hr+f'\mu}{\sqrt{2hG^2+f'^2\mu^2}}, \\ \sin u &= \frac{\sqrt{-2h}}{\sqrt{2hG^2+f'^2\mu^2}}\sqrt{-G^2+2f'\mu r+2hr^2}, \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

il viendra, au lieu de (139^{bis}),

$$u-\sqrt{1+\frac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}\sin u=\frac{(-2h)^{\frac{3}{2}}}{f'\mu}(t+c); \quad (146)$$

en outre, des relations (145) on conclut

$$r=-\frac{f'\mu}{2h}\left[1-\sqrt{1+\frac{2hG^2}{f'^2\mu^2}}\cos u\right]. \quad (147)$$

L'équation (146) donne u en fonction de t et des constantes canoniques; (147) donne r en fonction de u, par

conséquent, en fonction de t; (144) donne w en fonction de r; enfin, (143) et (143bis) donnent ψ et θ en fonction de t et des constantes canoniques.

87. Cela posé, cherchons les relations qui existent entre les *éléments elliptiques* et les *constantes canoniques*.

Ces éléments elliptiques sont, comme on sait :

1° La longitude du nœud ascendant $\gamma N = \Omega$;

2° L'inclinaison du plan de l'orbite $PNQ = J$;

3° La longitude du périhélie $\gamma p = \varpi$;

4° L'excentricité e de l'orbite;

5° Le demi-grand axe a;

6° La longitude moyenne de l'époque, ou l'époque ε, qui sert à indiquer l'endroit où se trouve la planète à un moment donné.

Il est facile de voir que l'on a

$$\Omega = f,$$
$$J = \arccos \frac{F}{G},$$
$$\varpi = f + g;$$

en outre, de l'équation de l'orbite on déduit

$$e = \sqrt{1 + \frac{2hG^2}{f'^2\mu^2}};$$

d'autre part,

$$\frac{G^2}{f'\mu} = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2),$$

d'où

$$a = \frac{f'\mu}{-2h};$$

enfin, on désigne par $\varepsilon - \varpi$ la quantité

$$\varepsilon - \varpi = \frac{(-2h)^{\frac{3}{2}}}{f'\mu}\, c,$$

par suite,

$$\varepsilon = \frac{(-2h)^{\frac{5}{2}}}{f'\mu} c + f + g.$$

A ces éléments, on en joint encore un autre : c'est *le moyen mouvement de la planète*

$$n = \frac{(-2h)^{\frac{5}{2}}}{f'\mu}.$$

De ces diverses relations, on peut réciproquement déduire les éléments canoniques en fonction des éléments elliptiques :

$$f = \Omega, \quad g = \varpi - \Omega, \quad G = \sqrt{f'\mu a (1 - e^2)},$$

$$F = \sqrt{f'\mu a (1 - e^2)} \cos J, \quad h = -\frac{f'\mu}{2a},$$

$$c = \sqrt{\frac{a^3}{f'\mu}} (\varepsilon - \varpi) (*).$$

VII.

MÉTHODE DE M. BERTRAND POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.

88. *Poisson*, dans son mémoire, avait démontré le théorème que nous avons fait connaître précédemment (n° 58); mais il n'en a tiré aucune conséquence. C'est *Jacobi* qui,

(*) Nous avons encore fait une application de la même méthode au mouvement d'un point soumis à deux forces centrales, l'une attractive, et l'autre répulsive. (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 2e série, t. III.) Voir aussi pour les applications les mémoires cités précédemment : *Hamilton*, *Jacobi* et M. *Donkin*.

le premier, trente ans après la découverte de *Poisson*, a signalé l'utilité de ce théorème qu'il considère comme le plus important du calcul intégral (*). « Cependant, dit-il, » on le croirait complétement inconnu; car on ne le trouve » dans aucun traité de mécanique, ni dans aucun ouvrage » sur l'intégration des équations différentielles. » Aussi, ce géomètre n'hésite pas à en conclure que probablement personne, ni *Lagrange*, ni *Poisson* lui-même, n'en a soupçonné l'importance. La conséquence inespérée à laquelle il conduisit *Jacobi* est celle-ci :

Dans tout problème de mécanique, auquel s'applique le principe des forces vives, si l'on connaît deux intégrales autres que celle des forces vives, on pourra trouver, sans aucune nouvelle intégration, toutes les intégrales restantes.

89. Théorème. — *Si l'on connaît deux intégrales du système canonique* (26), *contenant chacune une constante arbitraire, et résolues par rapport à ces constantes,*

$$\alpha = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$
$$\beta = \psi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

la quantité

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i} \right),$$

reste constante pendant toute la durée du mouvement (n° 58) : *en d'autres termes, cette quantité, égalée à une constante arbitraire, est une troisième intégrale du système proposé.*

Cela résulte de la formule (97) : le premier membre étant nul, on a identiquement

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} + ((\alpha, \beta), \mathrm{H}) = 0;$$

(*) Jacobi, *Nova methodus integrandi æquationes differentiales partiales*, etc., Journal de Crelle, t. LX, pp. 45 et 46.

par suite (n° 23), (α, β) est une intégrale des équations proposées (26).

90. Il paraîtrait donc, et c'est en cela que consiste le *théorème de Jacobi* (*), qu'il suffit de connaître deux intégrales d'un système canonique, ou d'un problème quelconque de mécanique, pour en avoir la solution complète, par une série de différentiations seulement.

En effet, (α, β) étant une fonction de $p_1, \dots p_n, \dots q_1, \dots q_n, t$, si nous l'égalons à une constante arbitraire, nous aurons une troisième intégrale : celle-ci, combinée de la même manière avec les deux premières, nous donnera une quatrième et une cinquième intégrale, et ainsi de suite.

91. Il peut se faire que l'on n'ajoute aucune nouvelle intégrale aux deux premières, auxquelles on a appliqué le théorème de *Poisson* : cela aura toujours lieu lorsque l'une des intégrales α, β, est l'équation des forces vives.

Soient, par exemple,

$$\alpha = \mathrm{H}(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$
$$\beta = \varphi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

la seconde intégrale β ne renfermant pas le temps; nous aurons

$$(\alpha, \beta) = (\mathrm{H}, \varphi) = 0.$$

Si l'intégrale β contient le temps explicitement,

$$\beta = \psi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) - t,$$

on aura

$$(\beta, \mathrm{H}) = 1;$$

donc, dans les deux cas, il est impossible de former une nouvelle intégrale.

92. Il y a peu de problèmes de mécanique dont on ne

(*) JACOBI, *Nova methodus*, etc., JOURNAL DE CRELLE, t. LX, p. 43.

connaisse *à priori* deux intégrales; par conséquent, il n'existerait presque pas de problèmes dont on ne pût, par cette méthode, trouver la solution complète. Cependant, il existe deux cas dans lesquels l'équation de *Poisson* peut conduire à un résultat illusoire :

1° Lorsque (α, β), au lieu d'être une fonction de $p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n, t$, se réduit à zéro ou à une constante numérique;

2° Lorsque cette quantité (α, β) est une fonction de α et de β, de sorte que $(\alpha, \beta) = const.$ donne seulement une combinaison des deux intégrales connues, et n'apprend rien de nouveau.

Jacobi n'avait pas examiné ces deux cas d'exception. M. *Bertrand*, qui s'est beaucoup occupé de l'intégration des équations de la mécanique, et en a fait plusieurs fois le sujet de ses leçons au *collége de France*, a montré que les cas d'exception sont plus nombreux que ceux auxquels la méthode s'applique. Mais, dans ces cas, il est souvent possible de trouver un nombre plus ou moins grand d'intégrales nouvelles au moyen d'intégrales déjà connues. Comme nous l'avons déjà vu (n° 25), si l'on connait la moitié des intégrales, on peut compléter la solution du problème au moyen d'une fonction V qui donnera toutes les autres intégrales.

93. L'examen approfondi que M. *Bertrand* a fait des cas d'exception du théorème de *Poisson* a eu pour résultat remarquable de conduire ce savant à une nouvelle méthode d'intégration des équations de la forme hamiltonienne.

Nous allons exposer, dans les numéros suivants, les travaux de M. *Bertrand*.et ceux de *Bour*, qui a aussi traité cette question.

94. Nous avons vu précédemment quels sont les cas dans lesquels les deux intégrales connues n'en peuvent

donner une nouvelle par la formule de *Poisson* : ces cas, au nombre de deux, peuvent toujours, au moyen du théorème suivant, se ramener l'un à l'autre :

THÉORÈME I. — *Si*

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi,$$

sont deux intégrales d'un même problème de mécanique, et si (α, β) *est une fonction de* α *et de* β, *il existe toujours une fonction de* α, β *qui, égalée à une constante* γ, *donnera une intégrale telle que* (α, γ) *soit identiquement égal à l'unité.*

En effet,

$$(\alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\gamma}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\gamma}{dq_i} \right);$$

or, γ étant une fonction de α et de β, on a

$$\frac{d\gamma}{dp_i} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dp_i} + \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dp_i},$$
$$\frac{d\gamma}{dq_i} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq_i} + \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dq_i};$$

par suite, en réduisant

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta) \frac{d\gamma}{d\beta}.$$

Si (α, β) est une fonction de α et de β, on pourra déterminer γ par l'équation

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{(\alpha, \beta)}, \tag{148}$$

laquelle donnera

$$(\alpha, \gamma) = 1.$$

95. THÉORÈME II. — *Si* $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, *sont deux intégrales d'un même problème, et si, en les combinant par la méthode de* Poisson, *on trouve les intégrales*

$$(\alpha, \beta) = \gamma, \quad (\alpha, \gamma) = \delta, \quad (\alpha, \delta) = \varepsilon, \ldots (\alpha, \eta) = \zeta,$$

telles que $\zeta = F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta)$ (*), *il existe une ou plusieurs intégrales de la forme*

$$\xi = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta), \tag{149}$$

pour lesquelles (α, ξ) *se réduit identiquement à zéro, ou à l'unité.*

Si nous remplaçons, dans l'expression

$$(\alpha, \xi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\xi}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\xi}{dq_i} \right),$$

les dérivées de ξ par leurs valeurs, nous aurons, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}(\alpha, \xi) &= (\alpha, \beta) \frac{d\xi}{d\beta} + (\alpha, \gamma) \frac{d\xi}{d\gamma} + (\alpha, \delta) \frac{d\xi}{d\delta} + \dots + (\alpha, \eta) \frac{d\xi}{d\eta} \\ &= \gamma \frac{d\xi}{d\beta} + \delta \frac{d\xi}{d\gamma} + \varepsilon \frac{d\xi}{d\delta} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{d\xi}{d\eta}.\end{aligned}$$

Si, maintenant, on veut déterminer ξ de manière que l'on ait

$$(\alpha, \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 1,$$

on devra intégrer l'une des deux équations linéaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\gamma \frac{d\xi}{d\beta} + \delta \frac{d\xi}{d\gamma} + \varepsilon \frac{d\xi}{d\delta} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{d\xi}{d\eta} = 0, \\ &\text{ou} \\ &\gamma \frac{d\xi}{d\beta} + \delta \frac{d\xi}{d\gamma} + \varepsilon \frac{d\xi}{d\delta} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{d\xi}{d\eta} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

dont les intégrales satisferont à l'une ou à l'autre des conditions précédentes.

(*) Il est certain que l'on arrivera à une intégrale ζ jouissant de cette propriété d'être une fonction des précédentes : car la suite ne peut pas se continuer indéfiniment, les équations (26) n'admettant que $2n$ intégrales.

Donc, les intégrales de l'un des systèmes d'équations simultanées ordinaires

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\ldots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots\eta)}=\frac{d\xi}{0},\\ \text{ou}\quad &\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\ldots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots\eta)}=\frac{d\xi}{1}, \end{aligned}\right\}\quad(151)$$

donneront les valeurs de la fonction ξ, au moyen desquelles on formera les deux expressions les plus générales qui seront les deux intégrales générales des équations linéaires (150). Si l'équation en ξ renferme k variables indépendantes, son intégrale générale sera une fonction arbitraire de $k-1$ fonctions distinctes, et elle contiendra $k-1$ intégrales satisfaisant à la condition énoncée.

De là, on conclut le théorème suivant :

96. Théorème III. — *Une intégrale étant donnée, il y en a une ou plusieurs autres qui, combinées avec celle-ci, donnent des identités.*

Soit

$$\alpha=\varphi(p_1,\ldots p_n,q_1,\ldots q_n),$$

une intégrale donnée; si l'on en prend une seconde

$$\beta=\psi(p_1,\ldots p_n,q_1,\ldots q_n),$$

et qu'on la combine avec α, on aura un résultat (α,β) identiquement constant et le théorème est démontré; sinon $(\alpha,\beta)=\gamma$ sera une nouvelle intégrale.

On formera alors l'expression (α,γ), laquelle sera constante ou non : si (α,γ) est constante, la proposition est démontrée, sinon l'on posera $(\alpha,\gamma)=\delta$, équation qui sera une nouvelle intégrale, et ainsi de suite.

De cette manière, on arrive à une fonction ζ qui est :

1° Ou bien constante et la proposition est démontrée, puisque la fonction précédente satisfait à la condition énoncée ;

2° Ou bien une fonction des précédentes : dans ce cas, en formant une fonction ξ convenable des intégrales précédentes, on aura

$$(\alpha, \xi) = 0,$$

ou

$$(\alpha, \xi) = 1,$$

comme au numéro précédent.

97. Théorème IV. — *L'intégrale des forces vives donne toujours un résultat identique, quelle que soit l'intégrale avec laquelle on la combine.*

Soient en effet,

$$H = const.$$

l'intégrale des forces vives, et

$$\alpha = \varphi(p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_n),$$

une intégrale quelconque, ne renfermant pas t explicitement. Je dis que l'on aura l'équation identique

$$(\alpha, H) = 0.$$

En effet, $\alpha = \varphi$ étant une intégrale, sa dérivée, par rapport à t, est identiquement nulle; donc

$$\frac{d\alpha}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{dp_n}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{dq_n}{dt} = 0,$$

ou, en vertu des équations (26),

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} + \dots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{dH}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{dH}{dq_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha, H) = 0. \qquad (152)$$

Si α contient le temps explicitement,

$$\alpha = \psi(p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_n) - t,$$

nous aurons, en exprimant que cette équation est une intégrale du système (26),

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{dp_n}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{dq_n}{dt} = 0,$$

ou bien,

$$-1 + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} + \dots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{dH}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{dH}{dq_n} = 0;$$

donc

$$(\alpha, H) = 1, \qquad (153)$$

et le théorème est démontré dans les deux cas.

98. *Remarque.* — On pourrait maintenant se demander si l'intégrale ξ telle que (n° 96)

$$(\alpha, \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 1,$$

n'est pas ou l'intégrale des forces vives, ou une fonction de cette dernière. La proposition suivante prouve que cette intégrale diffère toujours de celle des forces vives :

99. Théorème V. — *Quelle que soit l'intégrale donnée*

$$\alpha = \varphi(p_1, \dots p_n, q_1, \dots q_n),$$

il en existe toujours au moins une autre λ, *qui n'est ni l'équation des forces vives, ni une fonction de celle-ci, et qui, combinée avec* α, *donne pour résultat* $(\alpha, \lambda) = 1$.

Soit β une intégrale quelconque différente de celle des forces vives,

$$\beta = \psi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n);$$

d'après ce que nous avons vu (n° 95), si, en combinant α avec β, puis avec les intégrales résultantes, on arrive, après k opérations, à une intégrale rentrant dans les précédentes, la fonction qui, combinée avec α donne un résultat illusoire, est donnée par une équation aux dérivées partielles, à k variables indépendantes. Cette intégrale aura, par conséquent, $k-1$ formes différentes.

Pour $k=1$, l'intégrale sera une combinaison de α et β; par suite, elle est différente de celle des forces vives.

Pour $k=2$, nous aurons

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$
$$(\alpha, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Or, si l'on cherche une intégrale qui, combinée avec α, donne un résultat identique, cette intégrale sera ou non celle des forces vives. Si elle est l'équation des forces vives, il vient

$$H = \delta;$$

d'où

$$H = f(\alpha, \beta, \gamma);$$

par suite,

$$\gamma = \zeta(\alpha, \beta, H).$$

Si, actuellement, on considère une fonction $\xi(\alpha, \beta, H)$, déterminée de manière que l'on ait

$$1 = (\alpha, \xi) = (\alpha, \beta)\frac{d\xi}{d\beta} = \zeta(\alpha, \beta, H)\frac{d\xi}{d\beta},$$

la fonction ξ donnée par cette équation

$$\zeta(\alpha, \beta, H)\frac{d\xi}{d\beta} = 1, \qquad (154)$$

sera différente de celle des forces vives, laquelle donne

$$(\alpha, H) = 0,$$

tandis que l'on a pour l'intégrale ξ,

$$(\alpha, \xi) = 1.$$

Si, dans la série des opérations successives entre $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, on trouve une intégrale ε pour laquelle

$$(\alpha, \varepsilon) = 1,$$

cette intégrale ε sera différente de celle des forces vives. Si, au contraire,

$$(\alpha, \varepsilon) = 0,$$

ε étant une fonction Π (H) de l'intégrale des forces vives, on aura, en désignant par δ l'intégrale précédente,

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon = \Pi(H). \qquad (155)$$

Mais alors il est facile de voir qu'il suffit, pour changer la chose, de prendre pour première intégrale $\frac{\beta}{\Pi(H)}$ au lieu de β.

Dans ce cas, l'intégrale $\frac{\delta}{\Pi(H)}$ est différente de l'équation des forces vives; combinée avec α, elle donnera un résultat identique

$$\left(\alpha, \frac{\delta}{\Pi(H)}\right) = 1. \qquad (156)$$

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

100. Des théorèmes précédents, M. *Bertrand* (*) déduit celui-ci :

THÉORÈME VI. — *Quelle que soit une intégrale donnée α, on peut toujours compléter la solution du problème en y adjoignant d'autres intégrales $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1}$, lesquelles, combinées avec α, donnent à l'équation de* Poisson *une forme identique* :

$$(\alpha, \beta_1) = 1, \quad (\alpha, \beta_2) = 0, \ldots (\alpha, \beta_{2n-1}) = 0.$$

(*) LAGRANGE, *Mécanique analytique*, note de M. *Bertrand*, t. 1, p. 426.

Comme nous l'avons vu (n° 99), quelle que soit l'intégrale α, il existe toujours une fonction β, telle que

$$(\alpha, \beta_1) = 1.$$

Nous devons maintenant prouver qu'il existe $2n-2$ intégrales distinctes de α et de β_1, qui combinées avec α donnent des identités. Si nous désignons par μ le nombre des intégrales satisfaisant à cette condition, $\beta_2, \dots \beta_{\mu+1}$, et si nous supposons $\mu + 1 < 2n - 1$, il existera évidemment alors des intégrales indépendantes des précédentes, ainsi que de α et de β_1.

Si $\beta_{\mu+2}$ est une de ces intégrales, nous aurons

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = \beta_{\mu+3},$$

$\beta_{\mu+3}$ étant différente de zéro. Je dis que $\beta_{\mu+3}$ est aussi différente de l'unité; car, sans cela, de

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = 1 = (\alpha, \beta_1),$$

on déduirait

$$(\alpha, \beta_{\mu+2} - \beta_1) = 0;$$

d'où il résulterait que $\beta_{\mu+2} - \beta_1$ serait une fonction de $\beta_1, \dots \beta_{\mu+1}$, et, par suite, $\beta_{\mu+2}$ ne serait pas une nouvelle intégrale.

$\beta_{\mu+3}$ étant différente de zéro et de l'unité, nous aurons

$$(\alpha, \beta_{\mu+3}) = \beta_{\mu+4},$$
$$(\alpha, \beta_{\mu+4}) = \beta_{\mu+5}, \text{ etc.}$$

Nous finirons par trouver une intégrale β, qui sera identiquement constante, ou une fonction des précédentes.

Soit

$$\beta_{\mu+i} = F(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\mu+i-1}), \qquad (157)$$

cette intégrale : cherchons à déterminer une fonction γ des intégrales α, $\beta_1, \dots \beta_{\mu+i-1}$, pour laquelle

$$(\alpha, \gamma) = 0.$$

Soit donc

$$\gamma = \varpi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\mu+i-1}),$$

il viendra

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta_1)\frac{d\varpi}{d\beta_1} + (\alpha, \beta_2)\frac{d\varpi}{d\beta_2} + \dots + (\alpha, \beta_{\mu+i-1})\frac{d\varpi}{d\beta_{\mu+i-1}},$$

ou bien

$$\frac{d\varpi}{d\beta_1} + \beta_{\mu+2}\frac{d\varpi}{d\beta_{\mu+2}} + \dots + \beta_{\mu+i-1}\frac{d\varpi}{d\beta_{\mu+i-2}} + F\frac{d\varpi}{d\beta_{\mu+i-1}} = 0. \quad (158)$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles, linéaire, sera celle dont les solutions détermineront des fonctions ϖ des intégrales α, β_1, $\beta_{\mu+2}$, ... $\beta_{\mu+i-1}$: ces solutions seront différentes de β_2, β_3, ... $\beta_{\mu+1}$, sinon il existerait une relation entre les intégrales β_2, ... $\beta_{\mu+1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite, le nombre $\mu < 2n - 2$ n'est pas admissible.

101. Le théorème pourra donc être énoncé de la manière suivante :

Étant donnée une intégrale α, autre que celles des forces vives, et indépendante du temps, on peut compléter la solution au moyen :

1° *De* $2n - 3$ *intégrales indépendantes du temps, et telles que, combinées avec α, elles donnent*

$$(\alpha, \lambda) = 0,$$

λ étant l'une quelconque d'entre elles.

2° *D'une autre intégrale μ, également indépendante du temps, et telle que*

$$(\alpha, \mu) = 1,$$

3° *D'une intégrale υ de la forme*

$$\upsilon = \varphi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) - t,$$

telle que

$$(\alpha, \upsilon) = 0.$$

102. La solution du problème peut donc être formée des $2n$ intégrales suivantes (*) :

1° L'intégrale des forces vives, $\alpha = H$;

2° Une intégrale qui renferme le temps $\beta = G - t$;

3° $2n - 2$ autres intégrales, indépendantes du temps, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}, \alpha_i$ étant une intégrale quelconque, indépendante du temps, et autre que celle des forces vives.

Ces diverses intégrales doivent donner

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad (\alpha_1, G) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_i) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i, égales à $3, \ldots 2n - 2$, c'est-à-dire pour i différent de 2.

103. Il est facile de démontrer que la méthode de M. *Bertrand* doit toujours réussir, lorsqu'il s'agit du mouvement d'un point dans un plan, ou, plus généralement, lorsque les coordonnées peuvent être exprimées au moyen de deux variables indépendantes.

Supposons que le problème dépende des deux variables q_1, q_2 : soient les quatre équations du mouvement

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{dH}{dp_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dq_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{dH}{dp_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{dH}{dq_2}, \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

$H = h$ étant l'intégrale des forces vives, et

$$\gamma(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha,$$

une deuxième intégrale. Cherchons s'il existe d'autres intégrales telles que $(\alpha, \beta) = 0$, et d'autres pour lesquelles $(\alpha, \beta) = 1$.

(*) Bour, *Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique*, Mémoires des savants étrangers, t. XIV, p. 796.

Nous connaissons deux intégrales, et le problème n'en comporte que quatre : de ces quatre intégrales, l'une renferme le temps, et trois ne le contiennent pas. Il nous reste à trouver une de ces dernières.

Cherchons d'abord s'il en existe une qui donne $(\alpha, \beta) = 0$; nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} = 0; \quad (160)$$

en outre, si β est une intégrale des équations (159), il vient

$$\frac{dH}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{dH}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{dH}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{dH}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} = 0. \quad (161)$$

Enfin, l'identité $(\beta, \beta) = 0$ nous donne

$$\frac{d\beta}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\beta}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\beta}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\beta}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} = 0. \quad (162)$$

Si l'on considère les quantités $\frac{d\beta}{dq_1}$, ... $\frac{d\beta}{dp_2}$, comme des inconnues, les équations (160), (161) et (162) seront du premier degré par rapport à ces inconnues, pourvu que, dans l'équation (162), l'on regarde les coefficients comme égaux aux inconnues. Ces équations feront connaître ces quantités, ou plutôt leurs rapports $\frac{d\beta}{dp_1} : \frac{d\beta}{dq_1}, \frac{d\beta}{dp_2} : \frac{d\beta}{dq_1}, \frac{d\beta}{dq_2} : \frac{d\beta}{dq_1}$. Or, ces équations sont aussi vérifiées si l'on remplace les dérivées de β par les dérivées de α : la première deviendra identique, et la troisième deviendra la première. Il en résulte que β doit être une fonction de α, et, par conséquent, $\beta = const.$ n'est pas une intégrale nouvelle, si toutefois aucune des équations ne rentre dans les autres.

Dans ce cas, les équations sont impropres à donner les inconnues, et l'on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\beta}{dq_1} &= \mathrm{M}\frac{d\alpha}{dq_1} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dq_1},\\
\frac{d\beta}{dp_1} &= \mathrm{M}\frac{d\alpha}{dp_1} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1},\\
\frac{d\beta}{dq_2} &= \mathrm{M}\frac{d\alpha}{dq_2} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dq_2},\\
\frac{d\beta}{dp_2} &= \mathrm{M}\frac{d\alpha}{dp_2} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dp_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (163)$$

Or, en multipliant par dq_1, dp_1, dq_2, dp_2, et ajoutant, on a

$$d\beta = \mathrm{M}d\alpha + \mathrm{N}d\mathrm{H}, \quad (164)$$

c'est-à-dire que β doit être une fonction de α et de H.

Il s'ensuit qu'il n'y a pas d'intégrale β, telle que $(\alpha, \beta) = 0$; mais il y en a une qui donne $(\alpha, \beta) = 1$.

Soit γ une intégrale pour laquelle (α, γ) est différent de zéro; posons

$$(\alpha, \gamma) = \delta, \quad (165)$$

δ étant une constante numérique, ou non.

Si δ est une constante numérique, on pourra multiplier ou diviser γ par une constante k, de manière que $\delta = 1$.

Si δ n'est pas une constante numérique, elle sera une fonction de α, γ, h, telle que $\varpi(\alpha, \gamma, h)$: car, comme il y a seulement trois intégrales distinctes qui ne renferment pas le temps, toute intégrale nouvelle, ne contenant pas t, sera une fonction des trois autres.

Prenons

$$f(\alpha, \gamma, h) = \beta, \quad (166)$$

et formons

$$(\alpha, \beta) = \delta\frac{d\beta}{d\gamma} = \varpi(\alpha, \gamma, h)\frac{d\beta}{d\gamma}.$$

Pour que $(\alpha, \beta) = 1$, il faut que l'on ait

$$\varpi(\alpha, \gamma, h)\frac{d\beta}{d\gamma} = 1 ; \qquad (167)$$

cette équation permet toujours de déterminer β, et, par conquent, une intégrale telle que $(\alpha, \beta) = 1$.

Enfin, on aura pour la quatrième intégrale

$$\varepsilon = t + \mathrm{F}(q_1, q_2, p_1, p_2), \qquad (168)$$

que l'on peut déterminer de manière que $(\alpha, \varepsilon) = 0$, ou $(\alpha, \varepsilon) = 1$.

Or, (α, ε) sera une expression ne renfermant pas t. Si (α, ε) est une constante numérique, on pourra prendre ε de manière que la constante soit l'unité : si cela n'a pas lieu, c'est-à-dire si (α, ε) n'est pas une constante numérique, on aura

$$(\alpha, \varepsilon) = \pi(\alpha, \gamma, h), \qquad (169)$$

et si l'on pose

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + f(\alpha, \gamma, h),$$

il vient

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + (\alpha, f(\alpha, \gamma, h));$$

d'où

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + (\alpha, \beta)\frac{df}{d\beta} = (\alpha, \varepsilon) + \frac{df}{d\beta}.$$

Or, on peut prendre f de telle manière que l'on ait

$$(\alpha, \varepsilon_1) = 0,$$

par conséquent,

$$\frac{df}{d\beta} = -\pi(\alpha, \gamma, h). \qquad (170)$$

On peut donc trouver une quatrième intégrale qui, combinée avec α, donne un résultat égal à zéro ou à l'unité.

VIII.

MÉTHODE DE BOUR.

104. D'après ce que nous avons vu (n° 101), les intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}$ doivent satisfaire à l'équation

$$(H, \zeta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dH}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0, \qquad (171)$$

laquelle sera aussi vérifié par $\zeta = H$; mais, si l'on y fait $\zeta = G$, on aura

$$(H, G) = 1.$$

Cherchons d'abord à intégrer cette équation (171), et montrons comment *chaque intégrale connue permet d'abaisser de deux unités le nombre des variables.* C'est en cela que consiste la *Méthode de Bour* (*), que nous allons actuellement développer.

105. PREMIER CAS. — Si l'on ne connaît que l'intégrale des forces vives $H = h$, elle nous servira à exprimer p_n en fonction de $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_{n-1}, H$, et nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\zeta}{dp_i}\right) &= \frac{d\zeta}{dp_i} + \frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i} \text{ (**)}, \\ \left(\frac{d\zeta}{dq_i}\right) &= \frac{d\zeta}{dq_i} + \frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (172)$$

(*) *Sur l'intégration des équations de la Mécanique*, MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS, t. XIV.

(**) Nous employons les parenthèses pour désigner les dérivées prises dans la nouvelle hypothèse, p_n étant une fonction de $p_1, \ldots p_{n-1}, q_1, \ldots q_n, H$; les dérivées sans parenthèses sont prises dans l'ancienne hypothèse.

Mais si nous remplaçons p_n par sa valeur dans $H = h$, nous aurons une identité : par conséquent,

$$\frac{dH}{dp_i} + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i} = 0, \quad \frac{dH}{dq_i} + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{dp_i} = \left(\frac{d\zeta}{dp_i}\right) + \frac{d\zeta}{dp_n}\frac{\dfrac{dH}{dp_i}}{\dfrac{dH}{dp_n}}, \quad \frac{d\zeta}{dq_i} = \left(\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dp_n}\frac{\dfrac{dH}{dq_i}}{\dfrac{dH}{dp_n}};$$

ces valeurs, substituées dans l'équation (171), donnent

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0, \qquad (173)$$

équation qui a deux termes de moins que (171).

106. L'intégrale des forces vives nous a permis de réduire l'équation (171) à une autre d'un ordre moindre de deux unités : ce qui distingue l'équation (173) de (171), c'est que (173) n'admet plus pour intégrale l'équation des forces vives.

Si nous faisons subir la même transformation à l'équation

$$(H, G) = 1,$$

nous obtiendrons

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}. \qquad (174)$$

107. Second cas. — Supposons que l'on connaisse deux intégrales du problème : celle des forces vives, et une autre :

$$H = h, \quad \alpha_1 = \varphi_1(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n);$$

l'équation

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) = 0, \qquad (175)$$

admet pour intégrales H, G, α_1, α_3, ... α_{2n-2}, mais non pas α_2, laquelle nous donne

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Si maintenant, nous déduisons p_n, en fonction de $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_{n-1}$, H, au moyen de l'équation $H = h$, nous pourrons transformer l'équation (175) en une autre

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0, \qquad (176)$$

pour $\zeta = \alpha_1, \alpha_3, \dots \alpha_{2n-2}$, tandis que pour $\zeta = G$, il viendra

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{dG}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{dG}{dq_i} \right) = - \frac{d\alpha_1}{dH}, \qquad (177)$$

et pour $\zeta = \alpha_2$, l'équation $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ devient

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\alpha_2}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\alpha_2}{dq_i} \right) = 1. \qquad (178)$$

L'équation (176) a pour intégrales $\alpha_1, \alpha_3, \dots \alpha_{2n-2}$: elle renferme deux variables de moins que l'équation (175); quant à l'intégrale G, elle a disparu.

108. Si l'on désigne par α_3 une de ses intégrales, on pourra, au moyen de α_1, exprimer p_{n-1} en fonction de $q_1, \dots q_n, p_1 \dots p_{n-2}$, H, α_1, et transformer l'équation (176) en la suivante :

$$(\alpha_3, \zeta) = \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{d\alpha_3}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_3}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0; \qquad (179)$$

cette équation aura deux variables de moins et admettra pour intégrales $\alpha_3, \alpha_5 \dots \alpha_{2n-2}$, tandis que $(\alpha_3, \alpha_4) = 1$.

L'intégrale α_4 aura disparu, et en même temps α_2.

On peut, comme on le voit, au moyen de chaque intégrale connue, diminuer de deux unités le nombre des variables et le nombre des termes. Cette diminution pro-

vient de ce que chaque intégrale connue permet d'éliminer sa *conjuguée* (*), qui est alors étrangère à l'équation réduite.

On pourra ainsi, par des réductions successives, obtenir les intégrales conjuguées deux à deux

$$a_1, a_2, \dots a_n,$$
$$b_1, b_2, \dots b_n,$$

telles que

$$(a_i, b_i) = 1, \ (a_i, b_{i'}) = 0, \ (a_i, a_{i'}) = 0, \ (b_i, b_{i'}) = 0.$$

109. Si l'on connaît une intégrale β_1, on posera $\alpha_1 = \beta_1$, et l'on écrira l'équation (177), dont on calculera les coefficients au moyen de $\alpha_1 = \beta_1$, comme nous l'avons indiqué, et l'intégrale α_2 sera éliminée.

Si l'on connaît une seconde intégrale β_2, on formera (β_1, β_2) :

Si $(\beta_1, \beta_2) = 0$, on posera $\alpha_3 = \beta_2$, et l'on pourra former l'équation (179).

Si $(\beta_1, \beta_2) = 1$, alors β_2 sera α_2 et l'on ne pourra former l'équation (179), puisque β_2, qui est la conjuguée de α_1, est éliminée de l'équation (177).

Si $(\beta_1, \beta_2) = \beta_3$, est une fonction de $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, on formera $(\beta_1, \beta_3) = \beta_4$, etc., jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction

$$\beta_k = f(H, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{k-1}),$$

et alors on aura l'équation linéaire

$$\beta_3 \frac{d\varpi}{d\beta_2} + \beta_4 \frac{d\varpi}{d\beta_3} + \dots + \beta_k \frac{d\varpi}{d\beta_{k-1}} = 0,$$

dont les $k-3$ intégrales sont des solutions du problème. On en prendra une pour l'intégrale α_3, et les autres serviront à abaisser l'ordre de l'équation (177).

(*) Deux intégrales α, β sont *conjuguées* lorsque l'on a $(\alpha, \beta) = 1$.

110. Lorsque l'on est parvenu à diminuer le plus possible le nombre des variables de l'équation aux dérivées partielles, on doit continuer les opérations d'une autre manière.

Si l'on ne connaît que les intégrales α_1 et h, on exprimera p_{n-1} en fonction des autres variables, et on l'éliminera des équations (176), (177) et (178), ce qui donnera

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0, \tag{180}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)+\frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}, \tag{181}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}. \tag{182}$$

Mais si l'on remplace dans

$$p_{n-1}=f(q_1, q_2 \cdots q_n, p_1, p_{n-1}, \alpha_1, H),$$

α_1 par sa valeur, on aura une identité; donc

$$\frac{dp_{n-1}}{dH}+\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}=0,$$

et l'équation (182) devient

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{dH}.$$

111. Si nous transformons de la même manière les équations (173) et (174), en remplaçant p_n et p_{n-1} par leurs valeurs, nous obtiendrons les trois équations

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_n}=0, \tag{183}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)+\frac{d\alpha_2}{dq_n}=-\frac{dp_n}{d\alpha_1}, \tag{184}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_n}=-\frac{dp_n}{dH}. \tag{185}$$

Or, les équations (180) et (183) ont pour intégrales celles du problème, $\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2}$: mais il n'en résulte pas que toute intégrale de l'une de ces équations soit une intégrale du problème.

En effet, $q_n = const.$ est une intégrale de (180), tandis que $q_{n-1} = const.$ est une intégrale de (183), et ces deux intégrales ne sont pas communes aux équations (180) et (183). Si l'on prend

$$\zeta = \psi(\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2}, q_n),$$

cette intégrale de l'équation (180) ne sera pas une solution du problème. Les solutions du problème sont les seules intégrales communes aux équations (180) et (183).

Si donc l'on connait h et α_1, on devra former les équations (180) et (183), dont il faudra trouver les solutions communes.

112. A cet effet, il est facile de démontrer que toute intégrale d'une équation, substituée dans le premier membre de l'autre, fournit une intégrale de la première (*). Si $\zeta_1 = const.$ est une intégrale de (180), et si l'on remplace ζ par ζ_1 dans le premier membre de (183), le résultat égalé à une constante sera une nouvelle intégrale de (180). Si ce résultat était nul, alors ζ_1 serait une intégrale commune, et, par suite, une intégrale du problème.

Supposons que le résultat soit ζ_2; $\zeta_2 = const.$ sera une nouvelle intégrale de (180), et l'on appliquera de nouveau le théorème, jusqu'à ce que l'on trouve :

1° Ou bien un résultat nul, et alors la fonction qui a donné cette valeur par sa substitution dans l'équation (183) sera une solution du problème;

(*) BOUR, *Sur l'intégration*, etc., MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS, t. XIV, p. 805.

2° Ou bien un résultat fonction des intégrales précédentes, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, et alors on déterminera la solution commune par une équation aux dérivées partielles linéaire facile à intégrer.

113. On obtiendra, de cette manière, un certain nombre d'intégrales communes que l'on pourra considérer comme formant un système canonique :

$$a_1, a_2, \ldots a_k,$$
$$b_1, b_2, \ldots b_k,$$

tel que l'on ait

$$(a_i, b_i) = 1, \ (a_i, b_{i'}) = 0, \ (a_i, a_{i'}) = 0, \ (b_i, b_{i'}) = 0,$$

pour

$$i \gtrless k, \text{ et } k \gtrless n - 2.$$

114. Cela posé, si nous remplaçons dans (183) ζ par $a_1, b_1 \ldots, a_k, b_k$, nous obtiendrons des résultats fonctions de ces mêmes quantités; sans cela, ces équations seraient de nouvelles intégrales de (180), en vertu de ce que nous avons vu ci-dessus. Si donc nous désignons ces expressions par $A_1, B_1, \ldots$, et si nous remplaçons dans (183) ζ par

$$\varphi(a_1, b_1, \ldots a_k, b_k, q_n),$$

nous aurons, en égalant le résultat à zéro, l'équation différentielle partielle :

$$A_1 \frac{d\zeta}{da_1} + B_1 \frac{d\zeta}{db_1} + \ldots + A_k \frac{d\zeta}{da_k} + B_k \frac{d\zeta}{db_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0, \qquad (186)$$

laquelle admet $2k$ intégrales.

Or, il est facile de voir que l'on peut poser (*)

$$A_i = \frac{dL}{db_i}, \qquad B_i = -\frac{dL}{da_i},$$

(*) Bour, *Mémoires des savants étrangers*, t. XIV, p. 806 et 807.

L étant une fonction de $a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots b_k$, que l'on déterminera par une quadrature.

Par suite, l'équation (186) deviendra

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{dL}{db_i}\frac{d\zeta}{da_i} - \frac{dL}{da_i}\frac{d\zeta}{db_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0, \qquad (187)$$

équation d'un ordre généralement inférieur, ou tout au plus égal à l'ordre des équations (180) et (183).

115. *Remarque.* — Si l'on ne connaît pas l'intégrale b_k, par exemple, on aura

$$(a_k, a_i) = 0, \qquad (a_k, b_i) = 0;$$

alors

$$\frac{dA_k}{da_i} = 0, \qquad \frac{dA_k}{db_i} = 0;$$

et A_k sera une fonction de a_k et de q_n; l'équation (187) devient

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\left(\frac{dL}{db_i}\frac{d\zeta}{da} - \frac{dL}{da_i}\frac{d\zeta}{db_i}\right) + A_k\frac{d\zeta}{dq_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

dont on déterminera une intégrale en posant

$$A_k\frac{d\zeta}{dq_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

116. Lorsque, par le procédé que nous venons d'exposer, on sera parvenu à trouver la moitié des intégrales du problème, la question sera résolue. Ces intégrales satisfaisant à la condition donnée par M. *Liouville*,

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

pour toutes les combinaisons deux à deux des intégrales

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-3},$$

nous pourrons terminer la solution, comme nous l'avons indiqué précédemment (n° 17).

117. *Remarque.* — Il est facile d'étendre les calculs précédents au cas où H serait une fonction du temps.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que α soit une intégrale des équations canoniques est (n° 23)

$$\frac{d\alpha}{dt} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{dH}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{dH}{dq_i} \right) = 0,$$

équation de la même forme que toutes les précédentes.

118. D'ailleurs, M. *Liouville* (*) a fait remarquer que ce cas général où

$$H = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

peut se ramener au cas particulier traité par *Bour*, pourvu que l'on augmente de deux unités le nombre des équations canoniques et le nombre des variables.

119. *Application.* — Comme application de la méthode de M. *Bertrand*, reprenons le problème déjà traité (n° 67) du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement étant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{\mu x}{r^3}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{\mu y}{r^3}, \end{array} \right. \qquad (188)$$

le principe des aires nous donne l'intégrale

$$\varphi = xy' - x'y = const. = \alpha.$$

Cherchons une seconde intégrale

$$\psi(x, y, x', y', t) = \beta,$$

(*) Liouville, *Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 201.

120. Actuellement, il nous reste à déterminer quelles sont celles de ces équations qui représentent les intégrales du problème; et, pour cela, nous devons exprimer que leurs dérivées totales par rapport à t sont nulles, en vertu des équations du mouvement.

Or, la première

$$\beta = F(u, v, w),$$

doit nous donner

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\beta}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \frac{d\beta}{dy'}\frac{dy'}{dt} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d\beta}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\beta}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{d\beta}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{d\beta}{du}.2x + \frac{d\beta}{dw}x';$$

de même,

$$\frac{d\beta}{dy} = \frac{d\beta}{du}.2y + \frac{d\beta}{dw}y',$$

$$\frac{d\beta}{dx'} = \frac{d\beta}{dv}.2x' + \frac{d\beta}{dw}x,$$

$$\frac{d\beta}{dy'} = \frac{d\beta}{dv}.2y' + \frac{d\beta}{dw}y,$$

de sorte que l'équation $\frac{d\beta}{dt} = 0$, nous donne

$$2\frac{d\beta}{du}w - 2\frac{d\beta}{dv}\frac{\mu w}{r^3} + \frac{d\beta}{dw}\left[v - \frac{\mu u}{r^3}\right] = 0,$$

et, en remplaçant r en fonction de u,

$$2\frac{d\beta}{du}w - 2\frac{d\beta}{dv}\frac{\mu w}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\beta}{dw}\left[v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right] = 0.$$

Or, on sait que l'intégration de cette équation se ramène à celle du système

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{5}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}} = \frac{d\beta}{0},$$

dont on déduit

$$d\beta = 0, \quad \mu u^{-\frac{3}{2}} du + dv = 0,$$
$$2w dw = v du + u dv;$$

par suite, l'intégrale générale est

$$\beta = F\left(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}}, uv - w^2\right),$$

ou bien

$$\beta = F\left[x'^2 + y'^2 - \frac{2\mu}{r}, (xy' - x'y)^2\right]. \qquad (193)$$

Cette intégrale n'est donc autre chose qu'une combinaison de l'intégrale des forces vives et de l'intégrale des aires : par conséquent, elle ne peut former une nouvelle solution du problème.

121. Si nous prenons maintenant la seconde équation (191)

$$\beta = t + F(u, v, w),$$

et si nous exprimons qu'elle est une intégrale, nous trouvons l'équation

$$1 + 2\frac{d\beta}{du} w - 2\frac{d\beta}{dv}\frac{\mu w}{u^{\frac{5}{2}}} + \frac{d\beta}{dw}\left[v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right] = 0,$$

que nous intégrerons, en posant

$$\frac{d\beta}{-1} = \frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{5}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}};$$

nous en concluons

$$d\beta = -\frac{du}{2w}, \qquad v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c_1, \qquad w^2 - uv = c_2;$$

d'où

$$d\beta = \frac{-du}{2\sqrt{c_2 + u\left(c_1 + 2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}},$$

$$\beta = -\int \frac{du}{2\sqrt{c_2 + c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}}}} + c_3;$$

par suite, l'intégrale générale est

$$\beta = t - \int \frac{du}{2\sqrt{c_2 + c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}}}} + \mathrm{F}(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}}, uv - w^2). \quad (194)$$

En égalant à zéro la fonction arbitraire F, et remplaçant u par r^2, on trouve l'équation

$$\beta = t - \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + c_1}}, \quad (195)$$

que nous avons déjà obtenue (n° 70).

122. Si nous cherchons à reconnaître si le problème admet des intégrales de la forme

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \mathrm{F}_1(u, v, w),$$

la condition $\frac{d\beta}{dt} = 0$, nous conduit à l'équation

$$2\frac{d\mathrm{F}_1}{du}w - 2\frac{d\mathrm{F}_1}{dv}\frac{\mu w}{u^{\frac{5}{2}}} + \frac{d\mathrm{F}_1}{dw}\left[v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{\sqrt{uv - w^2}}{u} = 0.$$

La fonction F_1 sera déterminée par l'intégration du système

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{5}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}} = \frac{d\mathrm{F}_1}{-\frac{\sqrt{uv - w^2}}{u}};$$

on en déduit

$$v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c_1, \quad uv - w^2 = c_2,$$

$$\frac{du}{2w} = -\frac{u dF_1}{\sqrt{uv - w^2}},$$

ou

$$dF_1 = -\frac{du\sqrt{c_2}}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}},$$

enfin,

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\, du}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}} + F_1(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}},\ uv - w^2);$$

d'où, en égalant à zéro la fonction arbitraire F_1 et remplaçant u par r^2,

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\, dr}{r^2\sqrt{c_1 + \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{c_2}{r^2}}}, \quad (*) \qquad (196)$$

ce qui est l'équation trouvée au n° 70.

(*) Une légère erreur s'est glissée dans le mémoire de M. BERTRAND (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 408). Il a employé la constante c_2 avec le même signe au numérateur et au dénominateur.

NOTE.

—

Si X est une fonction de $q_1, \dots q_n$, et si $p_1, \dots p_n$ sont déterminées en fonction de $q_1, \dots q_n$, par les équations

$$p_1 = \frac{dX}{dq_1}, \dots p_n = \frac{dX}{dq_n}, \tag{1}$$

de sorte que

$$\frac{dp_i}{dq_k} = \frac{dp_k}{dq_i}, \tag{2}$$

on aura

$$\frac{dp_1}{dq_1}\frac{dq_1}{dp_i} + \frac{dp_1}{dq_2}\frac{dq_2}{dp_i} + \dots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{dq_n}{dp_i} = 0,$$

$$\frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dp_i} + \frac{dp_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dp_i} + \dots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dq_n}{dp_i} = 1,$$

ou, en vertu des équations (2),

$$\frac{dp_1}{dq_1}\frac{dq_1}{dp_i} + \frac{dp_2}{dq_1}\frac{dq_2}{dp_i} + \dots + \frac{dp_n}{dq_1}\frac{dq_n}{dp_i} = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{dp_1}{dq_i}\frac{dq_1}{dp_i} + \frac{dp_2}{dq_i}\frac{dq_2}{dp_i} + \dots + \frac{dp_n}{dq_i}\frac{dq_n}{dp_i} = 1.$$

Si l'on ajoute ces équations, multipliées par $\frac{dq_1}{dq_k}, \dots \frac{dq_n}{dq_k}$, il vient

$$\frac{dq_i}{dp_k} = \frac{dq_k}{dp_i},$$

c'est-à-dire que, si l'on déduit des équations (1), $q_1, \dots q_n$ en fonction de $p_1, \dots p_n$, ces expressions seront les coefficients différentiels d'une fonction de $p_1, \dots p_n$,

$$q_1 = \frac{d\Upsilon}{dp_1}, \dots q_n = \frac{d\Upsilon}{dp_n},$$

et l'on aura

$$d\mathrm{X} = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

$$d\Upsilon = q_1 dp_1 + \dots + q_n dp_n;$$

d'où

$$d(\mathrm{X} + \Upsilon) = d(p_1 q_1 + \dots + p_n q_n),$$

et

$$\Upsilon = -(\mathrm{X}) + (q_1) p_1 + \dots + (q_n) p_n, \qquad (3)$$

$(\mathrm{X}), (q_1), \dots (q_n)$ étant les valeurs de $\mathrm{X}, q_1, \dots q_n$, exprimées en fonction de $p_1, \dots p_n$.

Si X renferme, outre $q_1, \dots q_n$, des quantités u, il en sera de même de $(q_1), \dots (q_n)$, et nous aurons

$$\frac{d(\mathrm{X})}{du} = \frac{d\mathrm{X}}{du} + \frac{d\mathrm{X}}{dq_1}\frac{d(q_1)}{du} + \dots + \frac{d\mathrm{X}}{dq_n}\frac{d(q_n)}{du}$$

$$= \frac{d\mathrm{X}}{du} + p_1 \frac{d(q_1)}{du} + \dots + p_n \frac{d(q_n)}{du}. \qquad (4)$$

De même, l'équation (3) différentiée par rapport à u, donne

$$\frac{d\Upsilon}{du} = -\frac{d(\mathrm{X})}{du} + p_1 \frac{d(q_1)}{du} + \dots + p_n \frac{d(q_n)}{du}; \qquad (5)$$

des équations (4) et (5) on conclut

$$\frac{d\mathrm{X}}{du} + \frac{d\Upsilon}{du} = 0. \qquad (6)$$